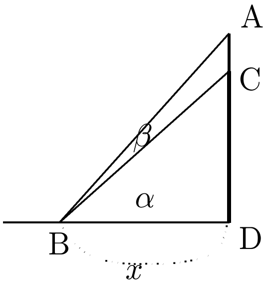
解答例

ビルの下端を D，BD $= x$，$\angle\mathrm{CBD} = \alpha$，$\angle\mathrm{ABC} = \beta$ とする．



$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{CD}}{x} = \frac{200}{x}, \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{AD}}{x} = \frac{250}{x}.$$

また，$\beta = (\alpha+\beta) - \alpha$ である．

タンジェントの加法定理により，

$$\tan\beta = \frac{\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha}{1 + \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha} = \frac{\frac{250}{x} - \frac{200}{x}}{1 + \left(\frac{250}{x}\right)\left(\frac{200}{x}\right)} = \frac{50}{x + \frac{50000}{x}}.$$

$x > 0$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ なので，

$$\beta\text{の最大値} \iff \tan\beta\text{の最大値} \iff x + \frac{50000}{x}\text{の最小値}$$

であるから，このときの x の値を求めればよい．　・・・・・・・・・・・・・・・・・・　①

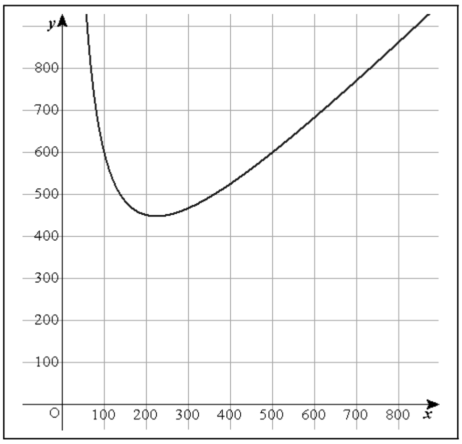
$f(x) = x + \dfrac{50000}{x}$ とおく．

$f'(x) = 1 - \dfrac{50000}{x^2}$．$f'(x) = 0$ を解くと，

$x^2 = 50000$ より，$x = 100\sqrt{5}$ [m]．

増減表より，このとき $f(x)$ は最小値をとる．

x	0	$\cdots$	$100\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小（最小）	↗



別解 1　【数学ⅡＢの範囲での解．上の解の①までは同じ】

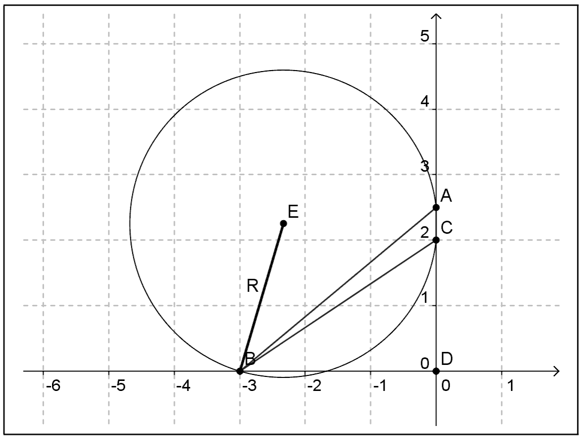
相加平均と相乗平均の関係から，　$x + \dfrac{50000}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{50000}{x}} = 2\sqrt{50000}.$

この不等式の等号が成り立つときが，　$x + \dfrac{50000}{x}$ の最小値で，このとき x の値は，

$x = \dfrac{50000}{x}$ をみたす x となる．これを解いて，$x^2 = 50000$ より，$x = 100\sqrt{5}$ [m]．

別解 2　【数学ⅠAの範囲での解】

ビルの下端を D，BD $= x$，$\angle$ABC $= \beta$ とする．



また，△ABC の外接円の中心を E，半径を R とする．

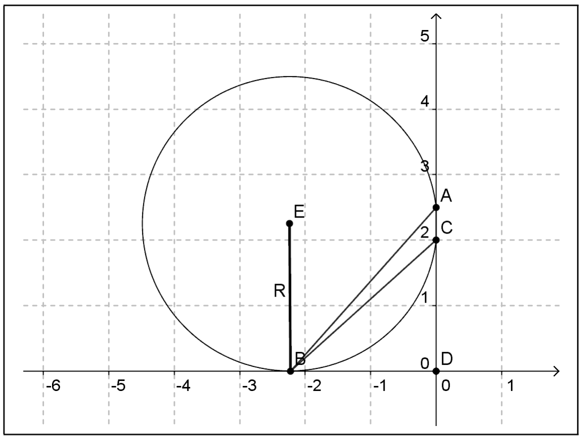
正弦定理により，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{50}{\sin\beta} = 2R$$

であるから，$\sin\beta = \dfrac{50}{2R}$.

$0^\circ < \beta < 90^\circ$ なので，

$$\beta\text{が最大} \iff \sin\beta\text{が最大} \iff R\text{ が最小} \iff \mathrm{EB}\perp\mathrm{DB}.$$



すなわち，△ABC の外接円が x 軸（直線 DB）に接するときに β は最大となる．

このとき，方べきの定理により

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}.$$

よって，$x^2 = 250\cdot 200 \quad (x > 0)$ より，

$$x = \sqrt{50000} = 100\sqrt{5}\ [\mathrm{m}].$$

解の数値の考察

求められた解 $x = 100\sqrt{5}$ [m] について，問題文で示された数値および無視する条件を考慮すると，解の有効数字は 1 桁か，多くとも 2 桁なので，

$$100\sqrt{5} = 100 \times 2.236\cdots \fallingdotseq 220$$

より，ビルから約 220m 離れた位置である．