大学入試に出題された「折り紙」問題

よしだ はじめ
（千葉県・河合塾 COSMO コース講師）

関東地区数学教育協議会　結成 50 周年記念研究大会　ポスター展
2009 年 11 月 21，22 日　@つくば市・つくば国際会議場

【問題】
封筒の中の折り紙を一辺の長さが２の正方形と見なそう．これらのうち，２枚は提出用，残りは練習用である．折り方を評価するので，提出用には途中経過の折り目をはっきり残し，不要な折り目やしわ等はできるだけつけないようにすること.（折り紙が足らなくなったときは試験官に申し出ること.）

(1) 一辺の長さ２の正方形を折って，$\sqrt{2}$,　$\sqrt{3}$,　$\sqrt{5}$ の各々の長さの線分を作りたい．各々について，折る手順を述べ，それらを１枚の折り紙の上で実行せよ．

［注意］各長さについて，できた線分を鉛筆でなぞり，そばに長さを明記すること．

(2) 折り紙（頂点を A,B,C,D とする）を折って正五角形を作りたい．辺 AB 上に一辺を持つ正五角形のうちで最大のものの折り方を述べ，その折り方を折り紙の上で実行せよ．

［注意］できた正五角形の４辺を鉛筆でなぞること．

(3) 正方形に含まれる正五角形のうちで，上のような「その五角形の一辺に含まれるもの」よりも大きなものがあるか否か考察せよ．

〔愛知教育大学・数学科・1999 年度後期〕

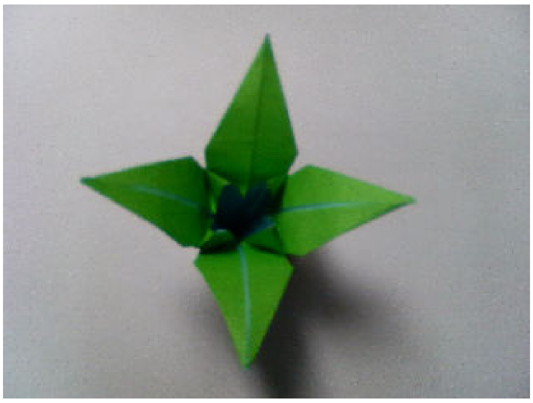
【コメント】

問題文が大学入試の文体で書かれているので，難しく思えるかもしれませんが，数学の内容としては中学３年終了程度です.

(2) に答えるには，正五角形の１辺と対角線の長さの比が必要です．これは知っていなくても，図を描けば求めることができます．そして，この折り方には (1) の解が関係してきます.

「正五角形の折り紙を作って何になるの？」

はい，使い道はありますよ.



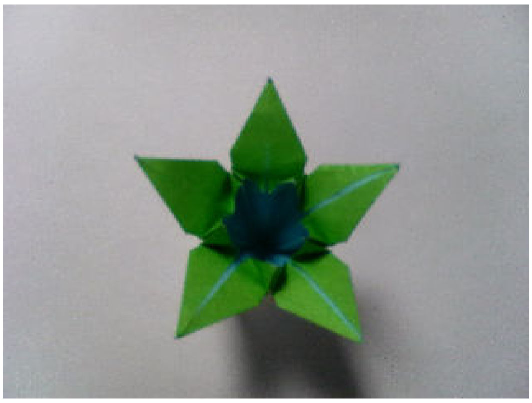
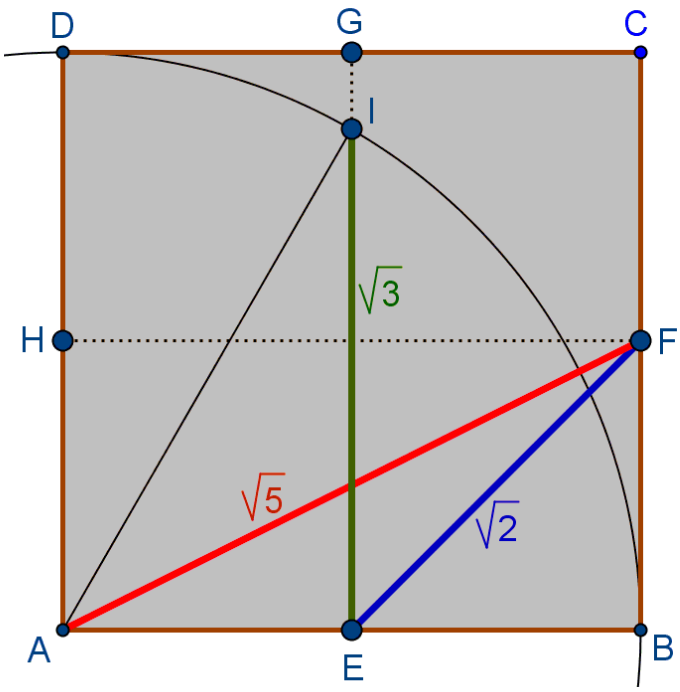


写真 1　正方形で作った 4 枚花びらの花（左）と正五角形で作った 5 枚花びらの花（右）

解答例とコメント

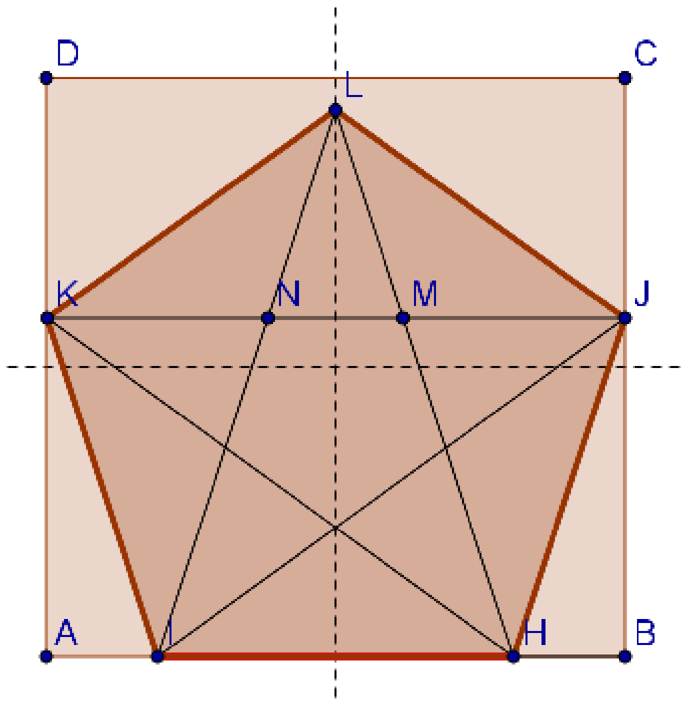
(1) 【解答例】



E，F，G，H は折り紙の各辺の中点.
EF $= \sqrt{2}$, AF $= \sqrt{5}$.
AB の垂直二等分線上に B がくるように，A を中心に AB を折り返す.
このとき，B と重なる点を I とすると，EI $= \sqrt{3}$.

【コメント】$\sqrt{2}$ は折り紙の対角線を折ってその半分，つまり頂点と中心を結ぶ線分でもよいのですが，生徒の解は図のような隣り合う辺の中点を結ぶ線分が主流のようです.

(2) 【方針】折り紙の辺 AB 上に一辺を持つ最大の正五角形は，対角線のひとつが辺 AB と平行で，折り紙の一辺の長さと等しい．つまり，正五角形の対角線の長さは 2 で，この正五角形の一辺の長さ x を求めます．



図のように正五角形ができたとします．その正五角形の対角線 KJ と LH の交点を M，KJ と LI の交点を N とすると，$\mathrm{KJ} = \mathrm{LI} = \mathrm{LH} = 2$，$\mathrm{IH} = \mathrm{KM} = \mathrm{NJ} = \mathrm{NI} = x$ です．

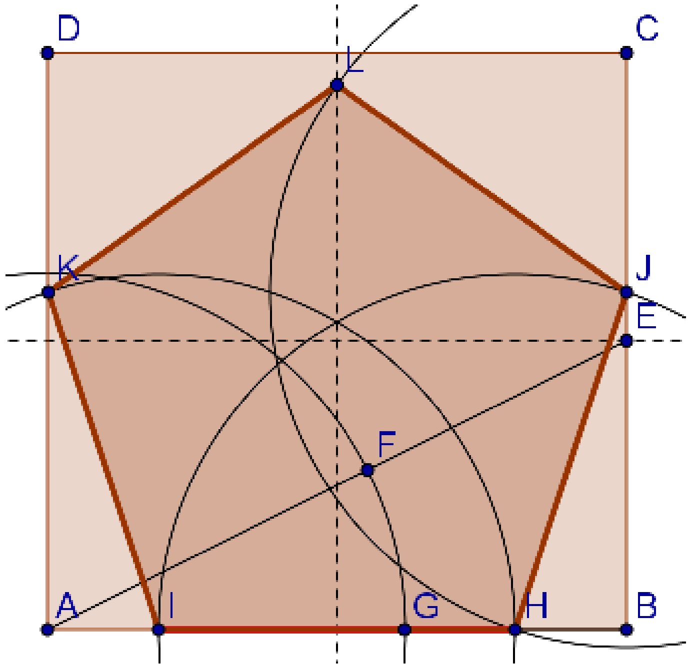
$\triangle\mathrm{LHI} \backsim \triangle\mathrm{LMN}$ だから，$\mathrm{LI} : \mathrm{IH} = \mathrm{LN} : \mathrm{NM}$．
すなわち，　$2 : x = (2 - x) : (2x - 2)$．
これより，　$x^2 + 2x - 4 = 0 \quad (x > 0)$．
これを解いて，　$x = \sqrt{5} - 1$ となります．

したがって，**折り紙の辺の中央に $\sqrt{5} - 1$ の線分を作り，その長さを 1 辺とする正五角形を作っていけばよい** のです．

なお，正五角形の 1 辺と対角線の比が $1 : \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ （黄金比）であることを知っていれば，$1 : \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = x : 2$ より，$x = \sqrt{5} - 1$ が求められます．

【参考】定規とコンパスで正五角形を作図する一般的な方法では，1 辺の長さ 1 に対して，対角線の長さ $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ を作図しています．

【解答例】



【手順】

(a) $\sqrt{5}-1$ の長さの線分をつくる.

(i) A と BC の中点 E を結ぶ線分を折る．$\mathrm{AE}=\sqrt{5}$.

(ii) EB を AE に重なるように折り返し，AE 上で B が重なる点を F とする．$\mathrm{EB}=1$ なので，$\mathrm{AF}=\sqrt{5}-1$.

(b) $\sqrt{5}-1$ の長さを辺 AB の中央に移す.

(i) AB を AE に重なるように折り返し，AB 上の F が重なる点を G とする．$\mathrm{AG}=\sqrt{5}-1$.

(ii) GB の中点を H とする．AB 上に $\mathrm{AI}=\mathrm{HB}$ となる点 I をとる．IH は AB の中央にあり，$\mathrm{IH}=\sqrt{5}-1$.

(c) 正五角形の残りの 3 頂点を決める.

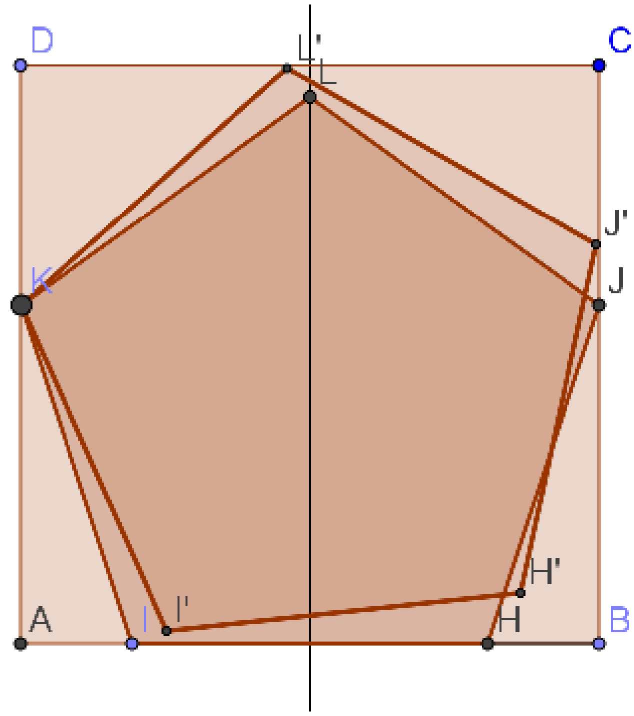
(i) H を中心に HI を折り返し，BC 上で I が重なる点を J とする．
$\mathrm{IH}=\mathrm{HJ}=\sqrt{5}-1$.
左側も同様にして，$\mathrm{IH}=\mathrm{IK}=\sqrt{5}-1$.

(ii) J を中心に JH を折り返し，AB の垂直二等分線上で H が重なる点を L とする．$\mathrm{IH}=\mathrm{HJ}=\mathrm{JL}=\sqrt{5}-1$.
左右対称だから，$\mathrm{KL}=\mathrm{JL}=\sqrt{5}-1$.

以上で，正五角形 IHJLK ができる.

(3) 【解答例】

AD ⊥ KJ であり，L は折り紙内部の点だから，正五角形 IHJLK を，K を中心としてほんのわずか左に回転すると，残りの 4 つの頂点 I，H，J，L が折り紙の内部（辺上ではなく）にあるようにすることができる．このとき，正五角形の各辺は K を中心として折り紙上で拡大できる余地がある．



【コメント】問いは「最大のものを求めよ」ではないので，この程度でよいと思います．

K をちょっと下にずらせば，さらに大きくできます．

なお，(1)，(2) については，数学教育協議会では 1970 年代から知られている方法です．

【参考文献】

1. 堀井洋子『折り紙と数学』明治図書 1977(絶版)

次は別の方法についても考察しています．

2. 芳賀和夫『オリガミクス (1) 幾何図形折り紙』日本評論社 1999