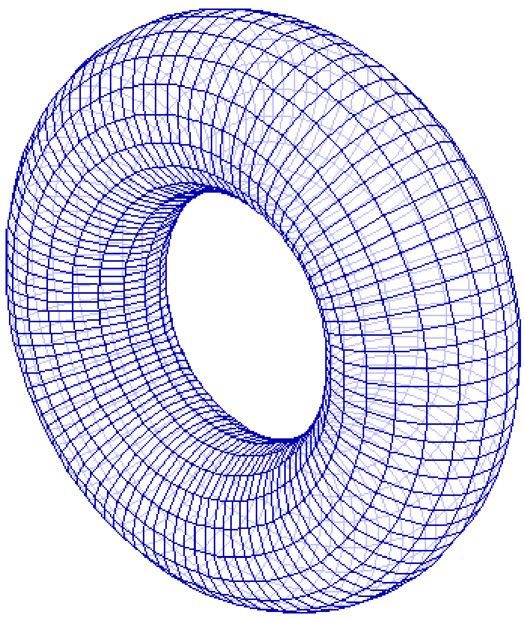
2011 年度　河合塾 COSMO

数学 Ⅲ・C

夏期基礎演習＋冬期総合演習
統合版



よしだ はじめ

2012 年 1 月 21 日 発行
2012 年 3 月 7 日 公開版補筆

出題分野および出題校

問番号	分野	出題年度・出題校	難易度	面白度
	夏期基礎演習			
1	級数	08　岡山理科大	*	
2	図形と級数	05　近畿大	*	
3	微分（極限値）	07　東京電機大	*	
4	微分（微分係数）	08　茨城大	*	
5	微分（導関数）	07　関西大	*	
6	微分（極大・極小）	05　上智大	*	
7	級数と定積分	08　愛媛大	*	
8	不定積分（置換積分）	05　関西大	*	
9	不定積分（部分積分）	07　立教大	**	
10	定積分で表された関数	07　大分大	*	
	冬期総合演習			
11 (a)	行列	2012 年関連創作	*	
11 (b)	不等式と微分	08　大阪府大	*	
11 (c)	級数と定積分	05　日本女子大	*	
12	曲線，速度，ベクトル	04　山形大	****	
13	行列，極限，確率	08　佐賀大	****	
14	最大値（三角関数，図形）	08　千葉大	**	
15	微分，積分	08　東北学院大	**	
16	曲線（媒介変数）	07　中央大	***	
17	積分の応用文章題	08　豊橋技術科学大学	**	
18	行列，数列	07　東京電機大	***	
19	曲線，積分	05　山口大	***	
20	曲線（極座標），微分，積分	08　大阪市立大	***	
21	微分の応用文章題	03　信州大	**	
22	行列，確率	08　龍谷大	**	

【注】マークシート方式の問題を記述式に改めるなど，一部表現を変更した個所もあります.

数学Ⅲ 基本で解ける 微積分入試問題

2011 年 8 月 13 日（土）２限〜

Ｉ期に学んだ範囲で解ける基本的な入試問題，10 問です．授業までに，考えておくだけでなく，解くだけでもなく，答案を作成しておいてください．

出題校名は授業時に．なお，マークシート方式の問いを記述式に改めるなど，一部表現を変更したところがあります．

問 1 n は自然数とする．

(1) 等式 $\dfrac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}=\dfrac{a}{3^n}-\dfrac{b}{5^n}$ が成り立つような定数 a, b の値を求めよ．

(2) 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}$ を求めよ．

問 2 半径 1 の円 C_1 に内接する正三角形を T_1 とし，T_1 に内接する円を C_2，C_2 に内接する正三角形を T_2，以下同様にして，円 C_n に内接する正三角形を T_n とする．

(1) C_n の半径 r_n，および T_n の 1 辺の長さ s_n を求めよ．

(2) C_n の面積を a_n，円周を b_n，T_n の面積を d_n とする．
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}d_n$ を求めよ．

問 3 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}$ を $f'(x)$ を用いて表せ．

問 4 $x=\sin\theta\cos\theta,\ y=\dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ における $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ．

問 5　$y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $(x>0)$ とする．

(1)　$y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ は $x=g(y)=y^3$ の逆関数である．関数 $g(y)$ に逆関数の微分法の公式を適用して $f'(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)=x$ となっている．これに積の微分法の公式を適用して $f'(x)$ を求めよ．

(3)　$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ に従って，$f'(x)$ を求めよ．

問 6　関数 $y=e^{\frac{1}{2}x}(x^2-2x-11)$ が極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ．

問 7　定積分を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$ を求めよ．

問 8　関数 $F(x)$ が $F'(x)=xe^{x^2}$，$F(0)=0$ をみたすとき，$F(x)$ を求めよ．

問 9　不定積分 $\displaystyle\int(\sin x+x\cos x)\,dx$ を求めよ．

また，この結果を用いて，不定積分 $\displaystyle\int(\sin x+x\cos x)\log x\,dx$ を求めよ．

問 10　a を正の定数とする．関数 $f(x)$ は $x\geqq a$ で $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x\log 2x-x$ を満たす．ただし，対数は自然対数とする．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　a の値を求めよ．

（以上，10 問）

2011 年度 COSMO 数学ⅢC 総合演習

2012 年 1 月 6 日から問題配布.

1 月 21 日 (土) 2 限～授業（解答発表会）.

全 12 問（ただし，小問からなる問題もある）を次の 3 セットに分けました．出題分野も各セットにいろいろな分野の問題を含むようにしてあります．また，数学ⅢCの入試問題なので，確率，数列，ベクトルなど，高校数学全分野の内容を含んでいます．しかし,「超難問」はありません．問題番号は夏演習 10 問との通し番号です.

第 1 セット： 問題番号 問 11 ～問 14 の 4 題（小問含む）

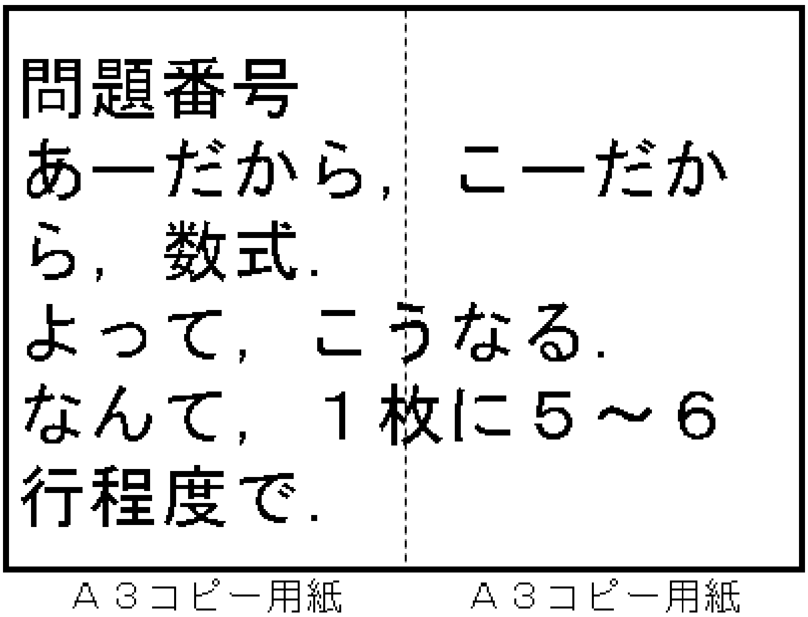
第 2 セット： 問題番号 問 15 ～問 18 の 4 題

第 3 セット： 問題番号 問 19 ～問 22 の 4 題

発表したい解答を授業までに，次のように解答用紙に書いておいてください. (今回は適当なカレンダーやポスターの裏紙がないので)

A3 コピー用紙を 2 枚張り合わせて，A2 サイズにします．用紙はスタッフにもらえます. 張り合わせも手伝ってくれるかも？　1 問の解答に数枚が必要でしょう．必要なら，マジックペン等も借りてください．図は別の用紙に描いたほうがよいかもしれません.

プレゼン用解答用紙



みんなで相談して，だれも発表しない問題のないようにしてください．場合によっては, 数日前に「ヒント」を出しましょうか？

では，賢答を期待して，健闘を祈ります.

第１セット　４問 （問 11 ～問 14）

問 11 (a)　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，A^{2012} を求めよ．

(b)　n を自然数とするとき，すべての正の数 x に対して $\log x + \dfrac{a}{x^n} > 0$ が成り立つための実数 a の範囲を n を用いて表せ．対数は自然対数とする．

(c)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ の値を求めよ．

問 12　xy 平面上を動く点 $\mathrm{P}(x, y)$ の時刻 t における座標を $x = 5\cos t$，$y = 4\sin t$ とし，この点の速度を $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ とする．ただし，角の単位はラジアンとする．2 点 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(-3, 0)$ をとる．

(1)　$x = 5\cos t$，$y = 4\sin t$ から，t を消去して，x と y の関係式を求めよ．

(2)　速度 $\vec{v}$ を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\vec{v}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{v}$　および　$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と $\vec{v}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\vec{v}$　を t を用いて表せ．

(4)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の大きさをそれぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ とするとき，
等式 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 5 - 3\cos t$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 5 + 3\cos t$ が成り立つことを証明せよ．

(5)　$\angle\mathrm{APB}$ の 2 等分線の方向ベクトルは，$\vec{v}$ に垂直であることを証明せよ．

問 13　$0 < a < 1$,　$0 < b < 1$ を満たす実数 a, b に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}$$　とする．

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) 行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ．

(4) x_n, y_n は，どのような試行に対する，どのような事象の確率を与えていると考えられるか．例を 1 つ示せ．

問 14　地上にいる人が，高さ 200m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50m の鉄塔を見る．鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，$\angle\mathrm{ABC}$ が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか．ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する．

第2セット　4問（問15〜問18）

問 15　関数 $f(x) = xe^{-2x}$ について次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $y = f(x)$ の変曲点を通る接線 l の方程式を求めよ.

(3) 曲線 $y = f(x)$ のグラフと直線 l と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

問 16　xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は $0 \leqq t \leqq \pi$ である t により

$$x = \frac{4\cos t - 2}{5 - 4\cos t}, \quad y = \frac{4\sin t}{5 - 4\cos t}$$

と表されている.

(1) $y \geqq 0$ であることを示せ.

(2) $\sin t$ を x, y を用いて表せ.

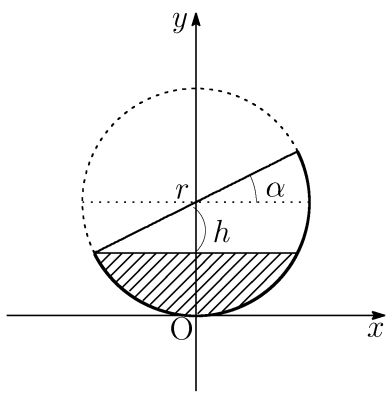
(3) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$\mathrm{P}(x, y)$ はどのような図形を描くか.

問 17　曲線 $x^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad (0 \leqq y \leqq r)$ を y 軸の周りに1回転させてできる回転体の形をした容器に水が満たされている．この容器を図に示すように角度 α だけ傾けると，水がこぼれて水面が h だけ下がった.

(1) h と α の関係を示せ.

(2) 容器を角度 α だけ傾けたとき，容器に残った水の体積 V を α の関数として表せ.

(3) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，容器に残った水の体積は，容器を傾ける前の水の体積の何倍か求めよ.



問 18　n は自然数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ および $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3a_n + 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす数列の一般項 a_n を n を用いて表せ.

(3) (2) の漸化式は $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix}$ と書けることを利用して，$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(4) A^n を求めよ.

第３セット　４問 （問19～問22）

問 19　2つの楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ で囲まれる共通部分の面積を求めよ．

問 20　xy 平面において，原点Oを極とし，x 軸の正の部分を始線とする極座標 (r,θ) に関して，極方程式 $r=1+\cos\theta$ によって表される曲線 C を考える．ただし，偏角 θ の動く範囲は $0\leqq\theta\leqq\pi$ とする．

(1) 曲線 C 上の点で，y 座標が最大となる点 P_1 の極座標 (r_1,θ_1)，および，x 座標が最小となる点 P_2 の極座標 (r_2,θ_2) を求めよ．

(2) 上の (1) の点 P_1，P_2 に対して，2つの線分 OP_1，OP_2 および曲線 C で囲まれた部分の面積 S は $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$ となることが知られている．S の値を求めよ．

問 21　円柱形の缶を金属板で作りたい（缶は両端とも金属板のフタで閉じている）．缶の容積を一定とした場合に，缶の製作に要する金属板を最小で済ませるには，底面の直径 d と高さ h との比をどのようにすればよいか．その比を求めよ．ただし，金属板の厚さは無視できるものとする．

問 22　xy 平面上で原点を中心とする $\dfrac{\pi}{3}$ の回転移動を表す行列 A と y 軸に対する対称移動を表す行列 B はそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である．いま，確率 p で表，確率 $1-p$ で裏の出るプラスチックの皿を投げ，表が出れば行列 A，裏が出れば行列 B を選ぶ試行を考える．この試行を2回繰り返し，1回目に選ばれた行列を T_1，2回目に選ばれた行列を T_2 として，$T=T_2T_1$ で表される移動を考える．

(1) 行列 T で表される移動が恒等変換，すなわち平面のすべての点をその点自身に移す移動となる確率を求めよ．

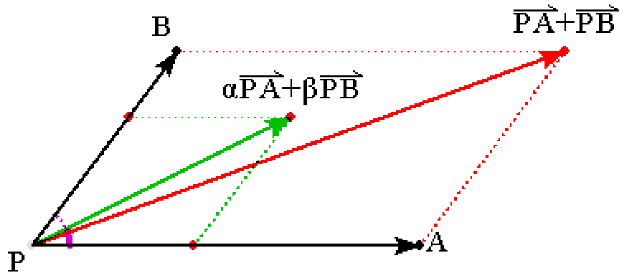
(2) 行列 T で表される移動により，点 $(1,\sqrt{3})$ が移される点をすべてあげ，それぞれの点に移る確率を求めよ．

(3) 行列 T で表される移動により，点 $(1,\sqrt{3})$ が移される点の x 座標の期待値を p で表せ．またこの期待値が0となるような p の値を求めよ．

ヒント

問 11　(a)　A^2, A^3, $\cdots$ と少し計算してみます.
(b)　a について整理して.
(c)　定積分の式に直します.

問 12　定番通り，(1) ～ (4) が (5) の準備になっています.
２つのベクトルでできる平行四辺形の対角線の方向がベクトルの和の方向ですが，これは角の２等分線の方向ではありません．でも，２つのベクトルの大きさが等しければ，できる平行四辺形はひし形で，対角線は角の２等分線の方向です．つまり，２つのベクトルの大きさをそろえてあげればいいのですね．それには，(4) を使えば $\cdots$



問 13　行列の計算はできるだけ定数を行列の外へ出しておきます.
(4) は，この問題が適用できる実例を考えて，ということです．ヒントにならない？

問 14　数Ⅲの範囲の微積分で解く方法のほか，数ⅡＢまでの範囲でも解けますし，数ⅠＡまでの範囲でも解けます．一番簡単なのは数Ⅲの方法かと思います．できたら，３通りで解けるといいですね.

問 15　$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ は証明なしで使ってもいいでしょう.

問 16　x, y の分母が同じところが式変形のヒントでしょうか．(3) の解は (1) を考慮して.

問 17　どこで代入するかで，計算が多少複雑になったりするかもしれません．ほとんど同じ問題が教科書にもありました.

問 18　これも小問の結果を使っていきます．(3) は漸化式を繰り返して用います.

問 19　求める部分の対称性を考慮しましょう.

問 20　極座標のままで積分する方法は授業で取り上げました．この問題には求め方が示されていますね.

問 21　関係式が書ければ，式が解法を導いてくれる，かと思います.

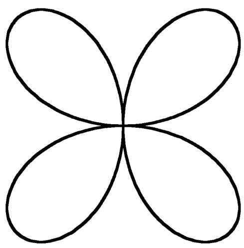
問 22　「点をすべてあげ」といっても多くありません．場合分けを考えてください.

2011 年度 COSMO 数学Ⅲ・C 演習

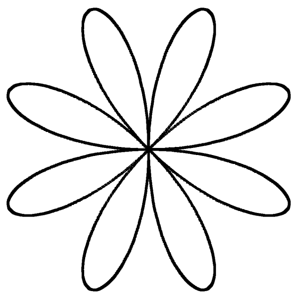
解答例・解説

正葉曲線 $r = \sin k\theta$

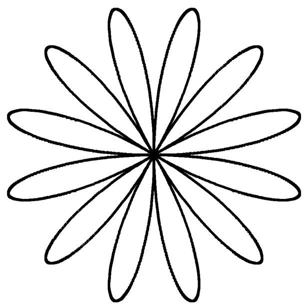
$r = \sin 2\theta$



$r = \sin 4\theta$

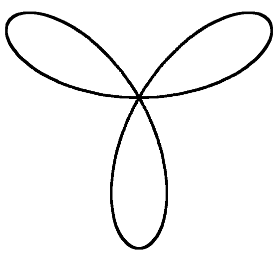


$r = \sin 6\theta$

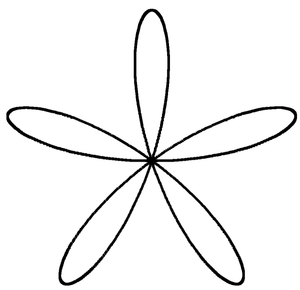


$r = \sin 2\theta$ で囲まれる部分の面積は授業で求めましたね.
さて，上の３つの面積は同じ？　違う？

$r = \sin 3\theta$



$r = \sin 5\theta$



では，こちらは？
k が奇数のときは，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ で曲線は一周しました.

夏期基礎演習

問 1　n は自然数とする.

(1)　等式 $\dfrac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}=\dfrac{a}{3^n}-\dfrac{b}{5^n}$ が成り立つような定数 a,b の値を求めよ.

解

$$\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}=\frac{5\cdot 5^n-3\cdot 3^n}{15^n}=5\left(\frac{5^n}{15^n}\right)-3\left(\frac{3^n}{15^n}\right)=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$=\frac{5}{3^n}-\frac{3}{5^n}.$$

よって，$a=5,\ b=3$.

(2)　無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}$ を求めよ.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3^n}-\frac{3}{5^n}\right)=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$$
$$=5\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-3\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$
$$=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=\frac{7}{4}.$$

コメント　ちょっと難しくした場合には，(1) のヒントの問い無しで，(2) だけが出題されます.

数値計算をしてみます．下表で $C_n=\dfrac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}$，$S_n=\displaystyle\sum_{n=1}^{n}\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{15^n}$ です．また，求める極限値を α とすると，$\alpha=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{S}_n=\frac{7}{4}=1.75$ です.

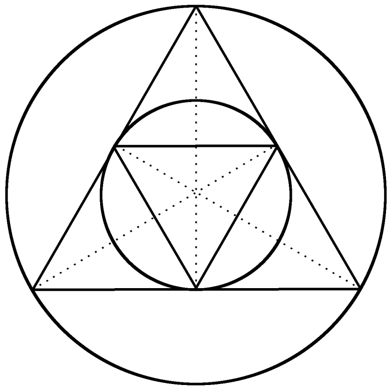
$\varepsilon=0.0001$ とすると，$n\geqq 10$ のすべての n で $|S_n-\alpha|<\varepsilon$ となります.（下表）
また $\varepsilon=0.00001$ とすると，$n\geqq 12$ のすべての n で $|S_n-\alpha|<\varepsilon$ となります.

n	$5^{(n+1)}$	$3^{(n+1)}$	15^n	C_n	S_n	誤差 $\lvert S_n-\alpha\rvert$	誤差＜ε ？	n
1	25	9	15	1.066666667	1.066666667	0.683333333	×	1
2	125	27	225	0.435555556	1.502222222	0.247777778	×	2
3	625	81	3375	0.161185185	1.663407407	0.086592593	×	3
4	3125	243	50625	0.056928395	1.720335802	0.029664198	×	4
5	15625	729	759375	0.019616132	1.739951934	0.010048066	×	5
6	78125	2187	11390625	0.006666711	1.746618645	0.003381355	×	6
7	390625	6561	170859375	0.002247837	1.748866482	0.001133518	×	7
8	1953125	19683	2562890625	0.000754399	1.749620881	0.000379119	×	8
9	9765625	59049	38443359375	0.00025249	1.749873371	0.000126629	×	9
10	48828125	177147	5.7665E+11	8.43682E-05	1.749957739	4.22609E-05	○	10
11	244140625	531441	8.64976E+12	2.81637E-05	1.749985903	1.40972E-05	○	11
12	1220703125	1594323	1.29746E+14	9.39609E-06	1.749995299	4.70112E-06	○	12

表中の `n.nnnnnE+11` は n.nnnnn $\times 10^{11}$，`n.nnnnnE-05` は n.nnnnn $\times 10^{-5}$ を表す.

問 2　半径 1 の円 C_1 に内接する正三角形を T_1 とし，T_1 に内接する円を C_2，C_2 に内接する正三角形を T_2，以下同様にして，円 C_n に内接する正三角形を T_n とする．

(1)　C_n の半径 r_n，および T_n の 1 辺の長さ s_n を求めよ．



解

$$C_1:\quad r_1 = 1, \qquad\qquad T_1:\quad s_1 = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$C_2:\quad r_2 = r_1 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad T_2:\quad s_2 = \frac{1}{2}\cdot s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C_3:\quad r_3 = r_2 \sin 30^\circ = \frac{1}{4}, \qquad T_3:\quad s_3 = \frac{1}{2}\cdot s_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

これより，r_n は初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列，また，s_n は初項 $\sqrt{3}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列．よって，$r_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$，　$s_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}$.

(2)　C_n の面積を a_n，円周を b_n，T_n の面積を d_n とする．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n$　を求めよ．

解　$a_n = \pi\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4^{n-1}}$, $a_1 = \pi$, 公比は$\dfrac{1}{4}$．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi$.

$b_n = 2\pi\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{\pi}{2^{n-2}}$, $b_1 = 2\pi$, 公比は$\dfrac{1}{2}$．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2\pi}{1-\frac{1}{2}} = 4\pi$.

$d_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}\right)\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4^{n-1}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4^n}$, $d_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, 公比は$\dfrac{1}{4}$.

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$.

コメント　オリジナルはマークシート形式の問題です．図がイメージできることが第一．図を描けば C_n, T_n の式は簡単に求められるでしょう．中の正三角形を 60° 回して描くのがポイント．ちなみに，C は circle（円），T は triangle（三角形）の頭文字．

問 3　関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}$ を $f'(x)$ を用いて表せ.

解　$h\to 0$ のとき，$2h\to 0$ である.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}}{\frac{\sin h}{2h}}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}}{\frac{\sin h}{h}}$$

$$=\frac{2\displaystyle\lim_{2h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}}{\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}.$$

ここで,

$$\lim_{2h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=f'(x)\ ,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

であるから，これより,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}=2f'(x).$$

コメント　微分の定義式 $\displaystyle\lim_{\square\to 0}\frac{f(x+\square)-f(x)}{\square}$ の□が揃うように式変形をします.

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ は最重要事項のひとつですね.

問 4　$x = \sin\theta\cos\theta$, $y = \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$ のとき，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ における $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ．

解　$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$,　$\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,　$\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$　である．

$x = \sin\theta\cos\theta$ より，

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\cos\theta + \sin\theta(-\sin\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2}.$

また，$y = \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$ より，

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{-\sin\theta\tan\theta - \cos\theta\frac{1}{\cos^2\theta}}{\tan^2\theta} = \frac{-\sin\theta\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta}}{\tan^2\theta}.$$

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} - 2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{-\frac{3}{2} - \frac{4}{2}}{3} = -\dfrac{7}{6}.$

これらより，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)} = \frac{\left(-\dfrac{7}{6}\right)}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{7}{3}.$$

コメント　定められた θ の値を使って微分係数を求める問題は，導関数がきれいに求まるとは限りません．導関数の式変形は適当にとどめて，数値を代入して計算するのがよいでしょう．

問 5　$y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $(x > 0)$ とする．

(1)　$y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ は $x = g(y) = y^3$ の逆関数である．関数 $g(y)$ に逆関数の微分法の公式を適用して $f'(x)$ を求めよ．

解　$x = g(y) = y^3$ より，$\dfrac{dx}{dy} = g'(y) = (y^3)' = 3y^2$.

逆関数の微分法の公式より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \dfrac{1}{3y^2} = \dfrac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.

(2)　$f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) = x$ となっている．これに積の微分法の公式を適用して $f'(x)$ を求めよ．

解　$f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) = x$ の両辺を x で微分する．

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= ((f(x) \cdot f(x)) \cdot f(x))' = (f(x)f(x))' f(x) + (f(x)f(x)) f'(x) \\
&= (f'(x)f(x) + f(x)f'(x)) f(x) + (f(x)f(x)) f'(x) \\
&= f'(x)f(x)f(x) + f(x)f'(x)f(x) + f(x)f(x)f'(x) = 3 (f(x))^2 f'(x).
\end{aligned}
$$

$$(\text{右辺}) = (x)' = 1.$$

これより，$3 (f(x))^2 f'(x) = 1$．よって，$f'(x) = \dfrac{1}{3 (f(x))^2} = \dfrac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.

(3)　$f'(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ に従って，$f'(x)$ を求めよ．

解

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\left((x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)\left((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{\left((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h) - x}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}.
\end{aligned}
$$

コメント　x^p の導関数の公式 $(x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ で計算結果はすぐにわかるはず．これを求められるだけでなく，導く方法を知っているかを問う問題です．
(3) は展開公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ を使います．

問 6　関数 $y = e^{\frac{1}{2}x}(x^2 - 2x - 11)$ が極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ．

解　$y = f(x) = e^{\frac{1}{2}x}(x^2 - 2x - 11)$.

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 - 2x - 11) + e^{\frac{1}{2}x}(2x - 2) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 - 2x - 11 + 4x - 4) \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x - 15) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x + 5)(x - 3). \end{aligned}$$

$e^{\frac{1}{2}x}$ はすべての x で正の値をとる．よって，増減表は次の通り．

x		-5		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

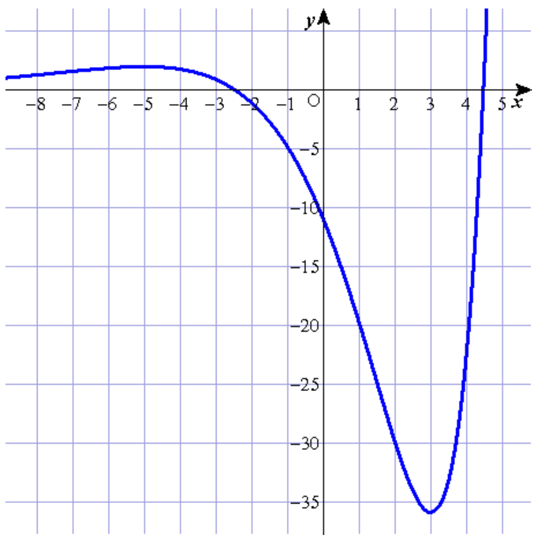
したがって，$x = -5$ で極大値，$x = 3$ で極小値をとる．

コメント　オリジナルはマークシート形式の問題でした．だから，問われている値は求めやすいけれど，グラフを描こうとすると，二次導関数は求められるとしても，数値を出すのはけっこう面倒ですね．

以下は参考です．

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x - 15)\right)' = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x - 15) + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(2x + 2) \\ &= \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x - 15 + 4x + 4) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}(x^2 + 6x - 11). \end{aligned}$$

$y'' = 0$ となるのは $x^2 + 6x - 11 = 0$ を解いて，$x = -3 \pm \sqrt{20}$ となり，これを小数で表すと，$x = -7.4\cdots$, $1.4\cdots$ です．$f(-5)$, $f(3)$ などの値を求めるのは，コンピュータ（関数電卓）の力を借りましょう．

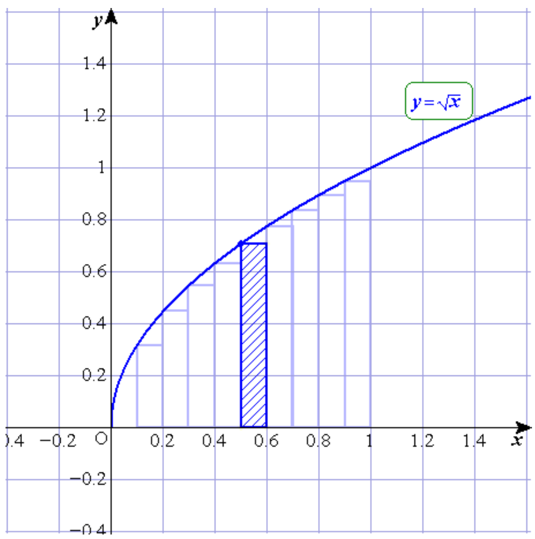


問 7　定積分を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$ を求めよ.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$
$$=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

コメント　教科書 p.152 問 11(2) と同じ問題でした.



上の**解**の２行めの式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

の左 $\sqrt{\dfrac{k}{n}}$ が関数値，$\dfrac{1}{n}$ が幅で，これを掛けたのが上の図の１本の長方形．これを足し合わせて極限をとると定積分になります.

問 8　関数 $F(x)$ が $F'(x)=xe^{x^2}$，$F(0)=0$ をみたすとき，$F(x)$ を求めよ．

解　$F'(x)=xe^{x^2}$ より，$F(x)=\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$.

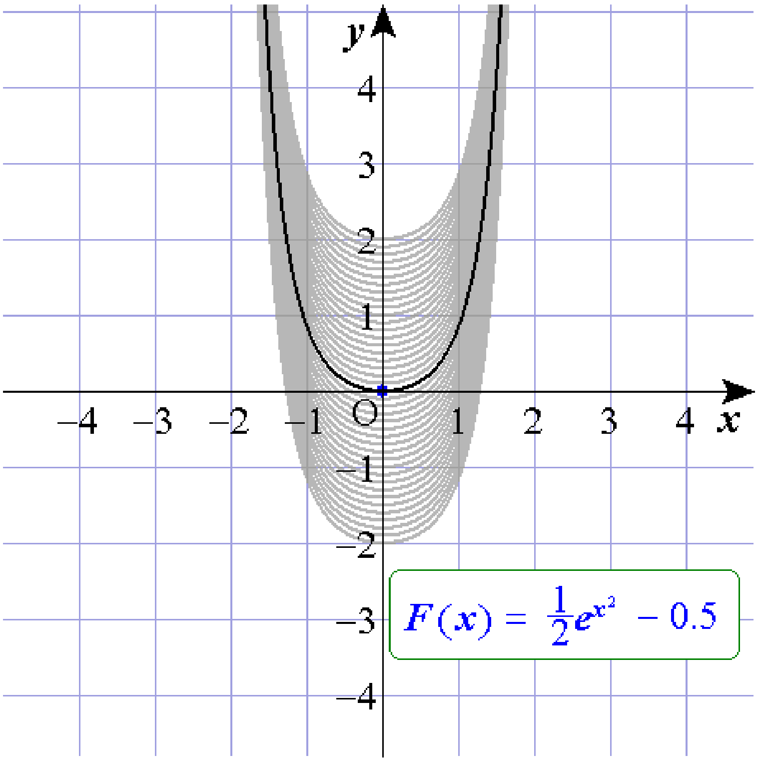
$t=x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=2x$．これより，$2x\,dx=dt$，$x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dt$.

よって，$F(x)=\displaystyle\int e^{x^2}\cdot x\,dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

また，$F(0)=\dfrac{1}{2}e^0+C=\dfrac{1}{2}+C=0$ だから，$C=-\dfrac{1}{2}$.

以上より，$F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}-\dfrac{1}{2}$.

コメント　置換積分の基本的な問題．$F(0)$ の値から，積分定数が決まります．



$F(x)$ の表す曲線は C の値によりいろいろ変わります（この場合は上下に平行移動します）．そのなかで，$(0,0)$ を通るものが解となります．

問 9　不定積分 $\displaystyle\int(\sin x + x\cos x)\,dx$ を求めよ．

また，この結果を用いて，不定積分 $\displaystyle\int(\sin x + x\cos x)\log x\,dx$ を求めよ．

解

$$\begin{aligned}\int(\sin x + x\cos x)\,dx &= \int \sin x\,dx + \int x\cos x\,dx \\ &= \int \sin x\,dx + \int x(\sin x)'\,dx \\ &= -\cos x + x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx \\ &= -\cos x + x\sin x + \cos x + C = x\sin x + C.\end{aligned}$$

ということは，

$$(x\sin x)' = \sin x + x\cos x$$

となっている．この結果を使って，

$$\begin{aligned}\int(\sin x + x\cos x)\log x\,dx &= \int(x\sin x)'\log x\,dx \\ &= x\sin x\log x - \int x\sin x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\sin x\log x + \cos x + C.\end{aligned}$$

コメント　まず，最初の問題を部分積分法で解きます．するとその結果を使えば，次の問題も部分積分法で解けるのです．実は，このような部分積分を繰り返して使って解く問題は高校の学習範囲外で，入試にも出してはいけないことになっているのですが，このようにヒントになる問いを順を追って示せば，出題は可能になるのです．つまり，ヒントであることを感じること．

問 10　a を正の定数とする．関数 $f(x)$ は $x \geqq a$ で $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x\log 2x - x$ を満たす．ただし，対数は自然対数とする．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \\ &= (x\log 2x - x)' = 1\cdot\log 2x + x\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2 - 1 = \log 2x. \end{aligned}$$

(2)　a の値を求めよ．

解　$0 < a \leqq x$ であり，$x = a$ とすると，

$$\int_a^a f(t)\,dt = a\log 2a - a = 0 \quad \text{であるから，}$$

$$\begin{aligned} & a\log 2a = a. \\ a \neq 0 \ \text{だから，} \quad & \log 2a = 1. \\ \text{すなわち，} \quad & 2a = e. \\ \text{よって，} \quad & a = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

コメント　定積分で表された関数を微分する問題です．
定数 a の値を定めるには $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$ であることを使います．

冬期総合演習

問 11 (a)　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，A^{2012} を求めよ．

解　$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = A^2\,A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$A^4 = E$（E は単位行列）となる．

$2012 = 4 \times 503$ だから，$A^{2012} = (A^4)^{503} = E^{503} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

コメント　今年 2012 年に関わる問題です．行列あるいは指数・対数関数の問題か，毎年どこかの入試で出題されます $\cdots$ たぶん．ちなみに，503 は素数です．

(b)　n を自然数とするとき，すべての正の数 x に対して $\log x + \dfrac{a}{x^n} > 0$ が成り立つための実数 a の範囲を n を用いて表せ．対数は自然対数とする．

解　$\log x + \dfrac{a}{x^n} > 0$，また，$x^n > 0$ より，$a > -x^n \log x$.

$f(x) = -x^n \log x$ とおく．直線 $y = a$ が $y = f(x)$ のグラフの最大値より大きい範囲にあればよい．

$$f'(x) = -nx^{n-1}\log x - x^n \cdot \frac{1}{x} = -x^{n-1}(n\log x + 1).$$

$f'(x) = 0$ となるのは，

$n\log x + 1 = 0$ より，$x = e^{-\frac{1}{n}}$.

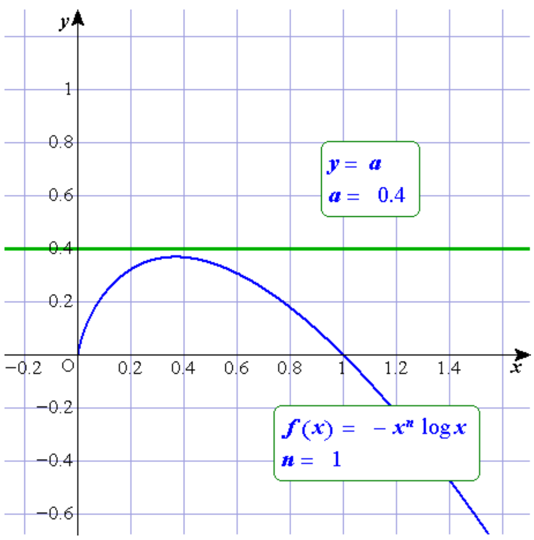
このとき $f(x)$ は最大値

$$f(e^{-\frac{1}{n}}) = -\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \log\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$= -e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne}$$

をとる．

よって，$a > \dfrac{1}{ne}$.



(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ の値を求めよ．

解 （与式）$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx.$

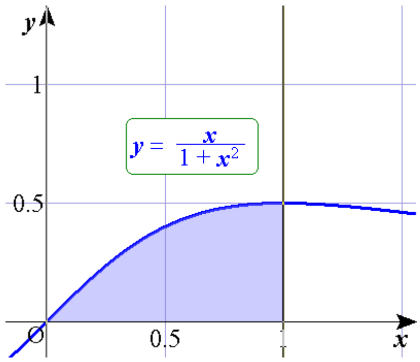
$t=1+x^2$ とおくと，$dt=2x\,dx$ より，$\dfrac{1}{2}dt=x\,dx$．x が $0\to1$ のとき，t は $1\to2$．

これより，$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\int_1^2\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\log x\right]_1^2=\frac{\log 2}{2}.$

コメント $\log 2=0.6931\cdots$（関数電卓より）

ですので，$\dfrac{\log 2}{2}=0.3465\cdots$ となります．

右の図から数値が感じられますか？



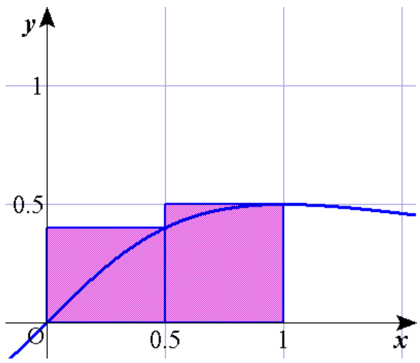
数値計算をしてみましょう．$n=j$ のときは，グラフの 0 〜 1 の区間を j 等分してできる長方形の面積の和の値です．（右下図は $n=2$ のとき）

$n=1$: $\dfrac{1}{1^2+1^2}$

$n=2$: $\dfrac{1}{2^2+1^2}+\dfrac{2}{2^2+2^2}$

$n=3$: $\dfrac{1}{3^2+1^2}+\dfrac{2}{3^2+2^2}+\dfrac{3}{3^2+3^2}$

⋮



表計算ソフト（Excel）で $n=10$ まで計算した結果です（小数第 5 桁を四捨五入）．

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
n	n²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	
1	1	0.5										0.5
2	4	0.2	0.25									0.45
3	9	0.1	0.1538	0.1667								0.4205
4	16	0.0588	0.1	0.12	0.125							0.4038
5	25	0.0385	0.069	0.0882	0.0976	0.1						0.3932
6	36	0.027	0.05	0.0667	0.0769	0.082	0.0833					0.3859
7	49	0.02	0.0377	0.0517	0.0615	0.0676	0.0706	0.0714				0.3806
8	64	0.0154	0.0294	0.0411	0.05	0.0562	0.06	0.0619	0.0625			0.3765
9	81	0.0122	0.0235	0.0333	0.0412	0.0472	0.0513	0.0538	0.0552	0.0556		0.3733
10	100	0.0099	0.0192	0.0275	0.0345	0.04	0.0441	0.047	0.0488	0.0497	0.05	0.3707

$n=30$ で 0.3548，$n=100$ で 0.3491 と，収束はゆっくりです．

問 12　xy 平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,y)$ の時刻 t における座標を $x=5\cos t$，$y=4\sin t$ とし，この点の速度を $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ とする．ただし，角の単位はラジアンとする．2 点 $\mathrm{A}(3,0)$，$\mathrm{B}(-3,0)$ をとる．

(1)　$x=5\cos t$，$y=4\sin t$ から，t を消去して，x と y の関係式を求めよ．

解　$x=5\cos t$ より，$x^2=25\cos^2 t$，これより，$\dfrac{x^2}{25}=\cos^2 t\ \cdots$①．

$y=4\sin t$ より，$y^2=16\sin^2 t$，これより，$\dfrac{y^2}{16}=\sin^2 t\ \cdots$②．

①，②を辺々加え，$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ より，$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ ．

(2)　速度 $\vec{v}$ を求めよ．

解　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(-5\sin t,\ 4\cos t)$．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\vec{v}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{v}$ および $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と $\vec{v}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\vec{v}$ を t を用いて表せ．

解　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(3-5\cos t,\ -4\sin t)$．これより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{v}&=(3-5\cos t,\ -4\sin t)\cdot(-5\sin t,\ 4\cos t)\\&=-15\sin t+25\sin t\cos t+(-16\sin t\cos t)=-15\sin t+9\sin t\cos t\\&=3\sin t(3\cos t-5).\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-3-5\cos t,\ -4\sin t)$．これより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\vec{v}&=(-3-5\cos t,\ -4\sin t)\cdot(-5\sin t,\ 4\cos t)\\&=15\sin t+25\sin t\cos t+(-16\sin t\cos t)=15\sin t+9\sin t\cos t\\&=3\sin t(3\cos t+5).\end{aligned}$$

(4)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の大きさをそれぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ とするとき，
等式 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=5-3\cos t$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=5+3\cos t$ が成り立つことを証明せよ．

解
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2&=(3-5\cos t)^2+(4\sin t)^2=9-30\cos t+25\cos^2 t+16\sin^2 t\\&=9-30\cos t+9\cos^2 t+(16\cos^2 t+16\sin^2 t)=9-30\cos t+9\cos^2 t+16\\&=25-30\cos t+9\cos^2 t=(5-3\cos t)^2.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2&=(-3-5\cos t)^2+(4\sin t)^2=9+30\cos t+25\cos^2 t+16\sin^2 t\\&=9+30\cos t+9\cos^2 t+(16\cos^2 t+16\sin^2 t)=9+30\cos t+9\cos^2 t+16\\&=25+30\cos t+9\cos^2 t=(5+3\cos t)^2.\end{aligned}$$
よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=5-3\cos t$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=5+3\cos t$ が成り立つ．■

(5)　∠APB の 2 等分線の方向ベクトルは，$\vec{v}$ に垂直であることを証明せよ．

解　∠APB の 2 等分線の方向ベクトルは，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}$ と表せるので，　【下注】

$$\frac{(3-5\cos t,\ -4\sin t)}{5-3\cos t}+\frac{(-3-5\cos t,\ -4\sin t)}{5+3\cos t}.$$

これを成分ごとに計算すると，x 成分について，

$$\frac{(3-5\cos t)(5+3\cos t)+(-3-5\cos t)(5-3\cos t)}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}=\frac{-32\cos t}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}.$$

また，y 成分について，

$$\frac{(-4\sin t)(5+3\cos t)+(-4\sin t)(5-3\cos t)}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}=\frac{-40\sin t}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}.$$

よって，∠APB の 2 等分線の方向ベクトルは，$\dfrac{(-32\cos t,\ -40\sin t)}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}$.

このベクトルと $\vec{v}=(-5\sin t,\ 4\cos t)$ との内積を求めると，

$$\frac{(-32\cos t,\ -40\sin t)}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}\cdot(-5\sin t,\ 4\cos t)$$

$$=\frac{(-32\cos t)(-5\sin t)+(-40\sin t)(4\cos t)}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}=\frac{160\cos t\sin t-160\sin t\cos t}{(5-3\cos t)(5+3\cos t)}=0.$$

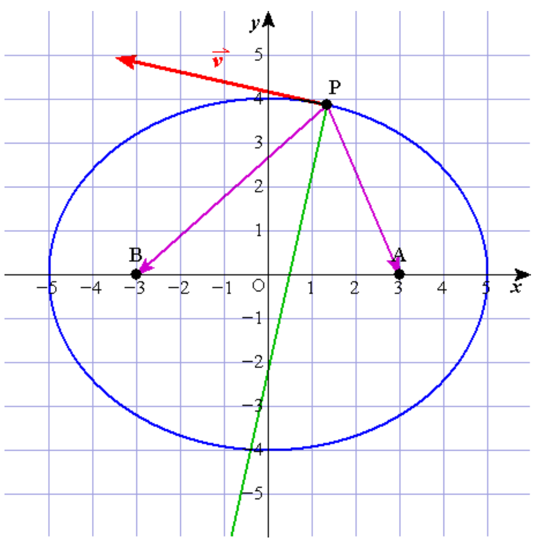
したがって，∠APB の 2 等分線の方向ベクトルは，$\vec{v}$ に垂直である．■

コメント

(1) ～ (4) の小問が (5) の準備になっています．ここまでは教科書の「問い」程度の問題です．

(5) の【注】について，等しい長さの 2 つのベクトルの和は 2 つのベクトルのなす角の二等分線の方向になります．だから，それぞれのベクトルをその長さで割って単位ベクトルに揃えています．

(5) の計算はちょっと長くなりますが，長い計算の細かい部分までは答案には書かなくてかまいません．どこを省略して，どこを書くかも表現力の練習です．



問 13　$0 < a < 1$,　$0 < b < 1$ を満たす実数 a, b に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \quad \text{とする．}$$

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

解　$0 < a < 1$,　$0 < b < 1$ より，$1-a > 0$,　$1-b > 0$.

$$\left(1 \times \frac{1-a}{1-b}\right) - (1 \times (-1)) = \frac{1-a}{1-b} + 1 = \frac{(1-a)+(1-b)}{1-b} = \frac{2-a-b}{1-b}.$$

$2-a-b > 0$ であるから，P の逆行列は存在する．

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(\dfrac{2-a-b}{1-b}\right)} \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

解

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b-1 & 1 \\ 1-a-b & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} \dfrac{(a+b-1)(2-a-b)}{1-b} & 0 \\ 0 & \dfrac{2-a-b}{1-b} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(3) 自然数 n に対して，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ．

解　$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$ と表せる．(2) の結果より，

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
A^n &= P(P^{-1}AP)^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 1 \\ -(a+b-1)^n & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \cdot \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-b}(a+b-1)^n + 1 & -(a+b-1)^n + 1 \\ -\dfrac{1-a}{1-b}(a+b-1)^n + \dfrac{1-a}{1-b} & (a+b-1)^n + \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで，$0 < a < 1$, $0 < b < 1$ より，$-1 < a+b-1 < 1$ であるから，
$n \to \infty$ のとき，$(a+b-1)^n$ は 0 に収束する．よって，

$$
\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1-b}{2-a-b} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1-a}{1-b} & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b}{2-a-b} & \dfrac{1-b}{2-a-b} \\ \dfrac{1-a}{2-a-b} & \dfrac{1-a}{2-a-b} \end{pmatrix}.
$$

これより，

$$
\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b}{2-a-b} & \dfrac{1-b}{2-a-b} \\ \dfrac{1-a}{2-a-b} & \dfrac{1-a}{2-a-b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b}{2-a-b} \\ \dfrac{1-a}{2-a-b} \end{pmatrix}.
$$

コメント　初期値を x_0, y_0 とすると，

$$
\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b}{2-a-b} & \dfrac{1-b}{2-a-b} \\ \dfrac{1-a}{2-a-b} & \dfrac{1-a}{2-a-b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b}{2-a-b}(x_0+y_0) \\ \dfrac{1-a}{2-a-b}(x_0+y_0) \end{pmatrix}
$$

なので，$x_0 + y_0$ が一定ならば，同じ値に収束します．
たとえば，

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{9}{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

など，どの初期値から初めても同じ値に収束します．

(4) x_n, y_n は，どのような試行に対する，どのような事象の確率を与えていると考えられるか．例を１つ示せ．

例 1　２つの箱 X，Y があり，１つの玉がどちらかの箱に入っている．１ステップごとにある確率で玉がその箱に留まるか，他の箱へ移動するかのどちらかの状態になる．玉が X に入っているとき，次のステップでも玉が X に留まる確率を a，Y に移動する確率を $1-a$ とし，また，玉が Y に入っているとき，次のステップでも玉が Y に留まる確率を b，X に移動する確率を $1-b$ とする．

このステップを n 回繰り返した後に，玉が X にある確率は x_n，玉が Y にある確率は y_n となる．ただし，最初に玉が X にある確率を $x_0=\dfrac{1}{3}$，玉が Y にある確率を $y_0=\dfrac{2}{3}$ とする．

例 2　ある人は昼食を外食にするか弁当を持参するかのどちらかにしている．ある日の昼食を外食にしたとき，次の日も外食にする確率は a，弁当にする確率は $1-a$，また，ある日に弁当を持参したときは，次の日も弁当にする確率は b，外食にする確率は $1-b$ とする．

この人の n 日後の昼食が外食である確率は x_n，弁当を持参する確率は y_n となる．ただし，最初の日は $x_0=\dfrac{1}{3}$，$y_0=\dfrac{2}{3}$ とし，また，休日は除いて考える．

例 3　ある人が選挙で投票に行ったとき，次の選挙でも投票に行く確率は a，行かない確率は $1-a$，また，投票に行かなかったときには，次の選挙でも投票に行かない確率は b，行く確率は $1-b$ とする．

n 回めの選挙で，投票に行く確率は x_n，行かない確率は y_n となる．ただし，最初の選挙は $x_0=\dfrac{1}{3}$，$y_0=\dfrac{2}{3}$ として考える．

コメント　(1) ～ (3) の計算はちょっと複雑でしたが，結局は (4) で示すような（示してほしい）実例に適用する目的のある計算なのです．

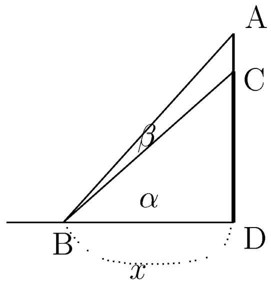
ところで，行列 P の各成分は確率を表しますが，ベクトル $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ の成分は確率でなくてもかまいません．というより，確率でないほうがむしろ一般的です．授業で配ったプリント「人口移動の問題」では，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ は次のように人口を表します．

> とある小国は都市部と周辺部から成り，総人口は 100 万人である．毎年，都市部の人口の 20 %が周辺部へ移り住み，周辺部の人口の 30 %が都市部へ移り住むという．総人口は毎年一定で増減がないとするとき，都市部，周辺部の人口はどのように変化していくだろうか？

(4) の問より，こちらのほうが例を考えやすいでしょうし，応用も広いでしょう．

問 14　地上にいる人が，高さ 200m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50m の鉄塔を見る．鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか．ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する．

解　ビルの下端を D，$\mathrm{BD}=x$，$\angle\mathrm{CBD}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABC}=\beta$ とする．



$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{CD}}{x}=\frac{200}{x},\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{AD}}{x}=\frac{250}{x}.$$

また，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ である．

タンジェントの加法定理により，

$$\tan\beta=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{\frac{250}{x}-\frac{200}{x}}{1+\left(\frac{250}{x}\right)\left(\frac{200}{x}\right)}=\frac{50}{x+\frac{50000}{x}}.$$

$x>0,\ 0^\circ<\beta<90^\circ$ なので，

$$\beta\text{の最大値}\iff\tan\beta\text{の最大値}\iff x+\frac{50000}{x}\text{の最小値}$$

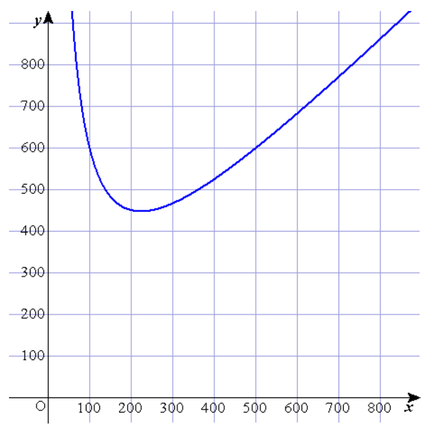
であるから，このときの x の値を求めればよい．

① $f(x)=x+\dfrac{50000}{x}$ とおく．$f'(x)=1-\dfrac{50000}{x^2}$.

$f'(x)=0$ を解くと，$x^2=50000$ より，

$$x=100\sqrt{5}\ (\mathrm{m}).$$

x	0	$\cdots$	$100\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小（最小）	↗



①以降の別解（数学ⅡB の範囲での解）

相加平均と相乗平均の関係から，$x+\dfrac{50000}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{50000}{x}}=2\sqrt{50000}$.

この不等式の等号が成り立つときが，$x+\dfrac{50000}{x}$ の最小値で，このとき x の値は，

$x=\dfrac{50000}{x}$ をみたす x となる．これを解いて，$x^2=50000$ より，$x=100\sqrt{5}\ (\mathrm{m})$.

別解２（数学ⅠＡの範囲での解）

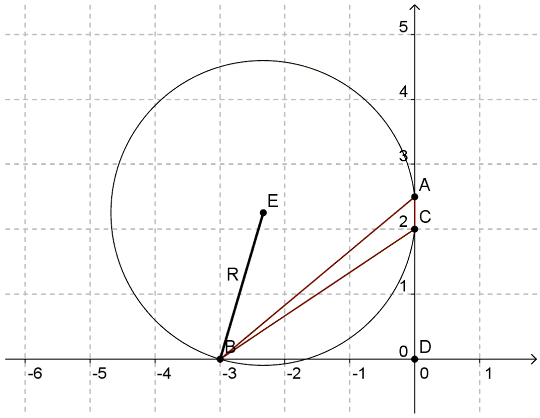
ビルの下端をD，$\mathrm{BD}=x$, $\angle\mathrm{ABC}=\beta$ とする．

また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心をE，半径を R とする．

正弦定理により，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{50}{\sin\beta}=2R$$

であるから，$\sin\beta=\dfrac{50}{2R}$.



$0^\circ<\beta<90^\circ$ なので，

$$\beta\text{が最大}\iff\sin\beta\text{が最大}\iff R\text{が最小}\iff \mathrm{EB}\perp\mathrm{DB}.$$

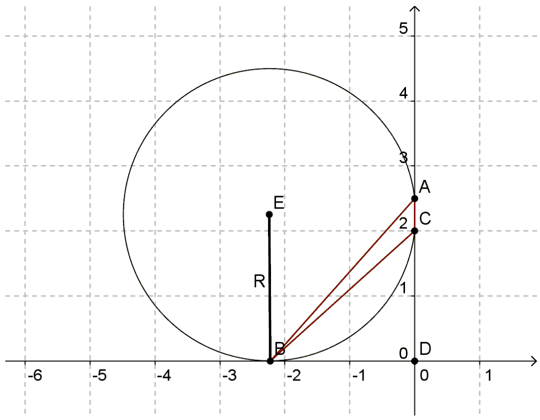
すなわち，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円が x 軸（直線DB）に接するときに β は最大となる．

このとき，方べきの定理により

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}.$$

よって，$x^2=250\cdot200\quad(x>0)$ より，

$$x=\sqrt{50000}=100\sqrt{5}\ (\mathrm{m}).$$



【以上，別解２終わり】

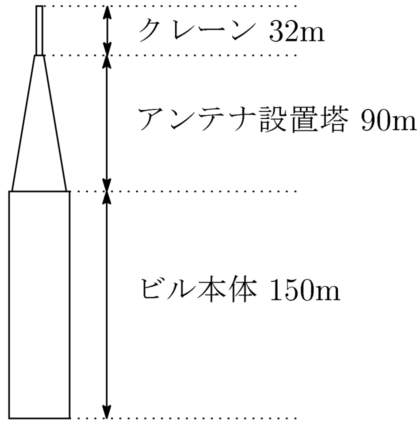
ここで，問題文で示された数値および無視する条件を考慮すると，解の有効数字は1桁か，多くとも2桁なので，解は $100\sqrt{5}=100\times2.236\cdots\fallingdotseq220$ より，約 220m.

コメント　ふつうの数学の問題の解答としては，最後の２行は書かないでしょう.（まさか「書いてはいけない」とは言わないですよね.）現実の問題を扱うときには，数学の問題として解くだけでは不十分で，求めた数学の解をもう一度現実に戻して解釈する必要があります．そのときに誤差や有効数字を考慮しなくてはならないのです.

とはいえ，今の受験生は「有効数字」を履修していません．改訂指導要領では,「有効数字」は中学１年の内容でようやく復活しました．だけど「有効数字何桁で求めよ」などと言われないと考えないのでは学習する意味がありません．それは出題する側，解説する数学教師側も同じです.

実際のビルについて適用してみましょう．東京近辺の方にはおなじみのNTT ドコモ代々木ビルです．

このビルの外観は３つの部分に分けられます．ビルの高さは本体部とアンテナ設置塔部までの240m で，その上のクレーン部は含まないそうです．アンテナ部は上にいくほどすぼまっているので，この部分を見る対象にするのはうまくありません．240m のビル上にある 32m のクレーンを見るとしましょう．つまり，問題は次のようになります．



クレーン部を見たときの視角が最大となる地点はビルから何 m 離れたところか．

上記の数値を適用して， $\tan\alpha = \dfrac{240}{x}, \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{272}{x}$． これより，約 260m です．

実際にどう見えるか，次の地点から写真を撮ってみました．［地図 Mapion 利用］

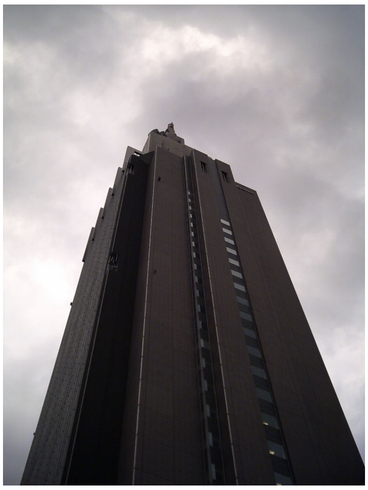
①北 440m 付近

②北北東 350m 付近

③東北東 260m 付近

④北東 150m 付近

⑤東 100m 付近



⑥南南西 70m 付近

⑦北西 50m 以内

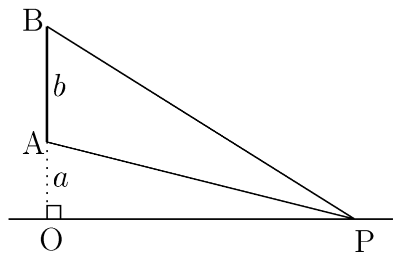
⑧北北西 180m 付近

⑨北北西 250m 付近

（距離は地図上でビル中心部（推定）からの距離．撮影：2009 年 9 月 23 日午後 5 時ごろ.）

2003 年度信州大理，医学部入試でも同様の出題がありました．定番問題です．

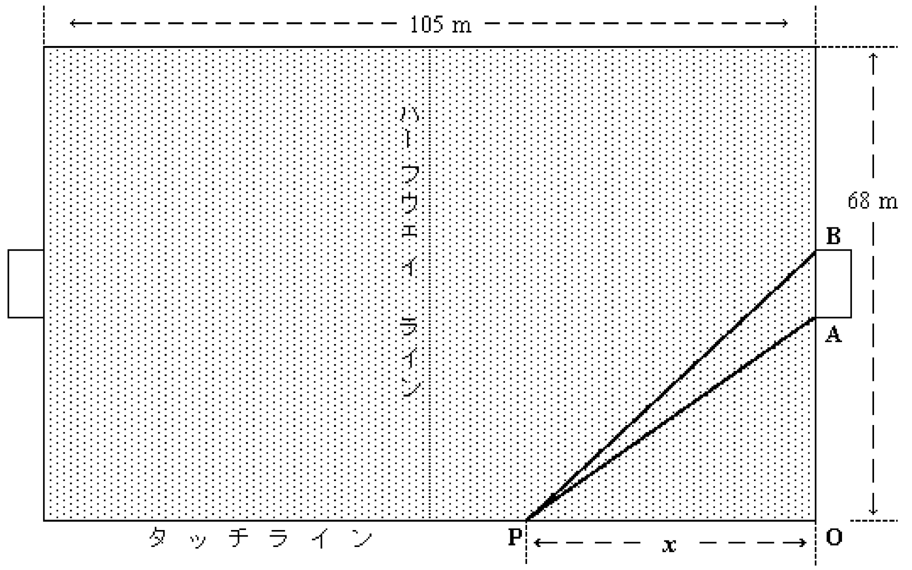
図のように地面上の点 O の真上に長さ b の棒 AB が地面に垂直になるようにつるしてあり，その下端 A は地面から高さ a のところにある．ただし，$a > 0$ とする．この棒を地面上を動く点 P から観察する．このとき，$\angle$BPA が最大になる点 P に対し OP の長さを求めよ．なお，地面は水平面とみなす．



数値は一般化されて文字になっています．解は $x = \sqrt{a(a+b)}$ です．確かめてください．

上方向に見上げる場合のほか，水平方向に見る場合にも適用できます．次は，サッカー競技場での場面です．

【問題】　サッカー競技場でタッチライン上から，ゴールの両端を見渡します．コーナーの位置 O から見ると，ゴールの両端は重なってしまい，視角は $0°$ です．ハーフウェイラインの方向に移動していくと，視角は大きくなっていきます．しかし，ゴールまでの距離が遠くなるので，ある位置を過ぎるとまた視角は小さくなっていきます．



では，**タッチライン上でゴールの両端を見渡す視角がもっとも大きくなる地点はどこでしょうか？**　図のように OP $= x$ として，x の長さを求めてください．

フィールドは長方形です．長さは次の通りとします．

・コーナーから手前のゴールポスト (内側) まで：OA $= a = 30.34$m

・ゴール (内側) の横幅：AB $= b = 7.32$m

【解】$x = \sqrt{30.34 \cdot (30.34 + 7.32)} \fallingdotseq \sqrt{1143} \fallingdotseq 34$m.

問 15　関数 $f(x) = xe^{-2x}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

解　$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$.

(2) $y = f(x)$ の変曲点を通る接線 l の方程式を求めよ．

解　$f''(x) = -2e^{-2x} - 2(1-2x)e^{-2x} = 4(x-1)e^{-2x}$.

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{1}{2}$，また，$f''(x) = 0$ となるのは $x = 1$.

$f(0) = 0$.　$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}e^{-1} = \dfrac{1}{2e}$.　$f(1) = 1 \cdot e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

$f'(1) = (1-2)e^{-2} = -\dfrac{1}{e^2}$.

関数 $f(x)$ の増減表は次の通り．

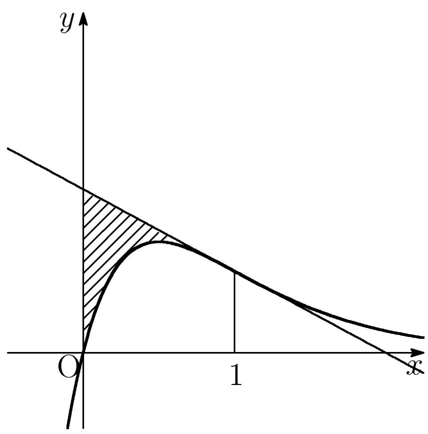
x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↱	極大	↴	変曲点	↳

変曲点の座標は，$\left(1,\ \dfrac{1}{e^2}\right)$.

変曲点での接線の傾きは，$f'(1) = -\dfrac{1}{e^2}$.

したがって，変曲点を通る接線 l の方程式は，$y - \dfrac{1}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}(x-1)$,

整理して，$y = -\dfrac{1}{e^2}x + \dfrac{2}{e^2}$.



(3) 曲線 $y = f(x)$ のグラフと直線 l と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解　求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^1 \left(-\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}\right)\,dx - \int_0^1 xe^{-2x}\,dx$$

と表せる．

まず，

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}\right)dx = \left[-\frac{1}{2e^2}x^2 + \frac{2}{e^2}x\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2e^2} + \frac{2}{e^2}\right) - 0 = \frac{3}{2e^2}.$$

次に，

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-2x}\,dx &= \int_0^1 x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\,dx = \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}.\end{aligned}$$

よって，$S = \dfrac{3}{2e^2} - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4e^2}\right) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4e^2}.$

コメント　微分の接線，積分の面積についての定番問題です．積分の後半の項の計算には部分積分法を使っています．

最後の解の値 $S = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4e^2}$ は，面積だから正になるはず．確かめましょう．

$e \fallingdotseq 2.7 < 3$ なので，$e^2 < 9$．よって，$\dfrac{9}{e^2} > 1$，　$\dfrac{9}{4e^2} > \dfrac{1}{4}$ となり，

$S > 0$ であることがわかります．こういう，ちょっとした確認が大事．

問 16　xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は $0 \leqq t \leqq \pi$ である t により

$$x = \frac{4\cos t - 2}{5 - 4\cos t}, \quad y = \frac{4\sin t}{5 - 4\cos t}$$

と表されている.

(1) $y \geqq 0$ であることを示せ.

解　分子について，$0 \leqq t \leqq \pi$ で $4\sin t \geqq 0$,
分母について，$0 \leqq t \leqq \pi$ で $-1 \leqq \cos t \leqq 1$ より，$1 \leqq 5 - 4\cos t \leqq 9$.
よって，$y \geqq 0$.

(2) $\sin t$ を x, y を用いて表せ.

解　$$x = \frac{4\cos t - 2}{5 - 4\cos t} = \frac{-5 + 4\cos t + 3}{5 - 4\cos t} = -1 + \frac{3}{5 - 4\cos t}.$$

これより，$x + 1 = \dfrac{3}{5 - 4\cos t}$，よって，$5 - 4\cos t = \dfrac{3}{x+1}$.　$\cdots$ ①

また，$y = \dfrac{4\sin t}{5 - 4\cos t}$ より，$5 - 4\cos t = \dfrac{4\sin t}{y}$.　$\cdots$ ②

①，②より，$\dfrac{3}{x+1} = \dfrac{4\sin t}{y}$.　したがって，$\sin t = \dfrac{3y}{4(x+1)}$.

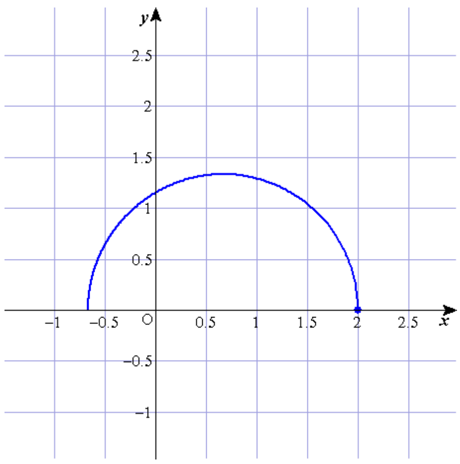
(3) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$\mathrm{P}(x, y)$ はどのような図形を描くか.

解　①より，$4\cos t = 5 - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{5(x+1) - 3}{x+1} = \dfrac{5x+2}{x+1}$.

よって，$\cos t = \dfrac{5x+2}{4(x+1)}$，$\cos^2 t = \dfrac{(5x+2)^2}{16(x+1)^2}$.　$\cdots$ ③

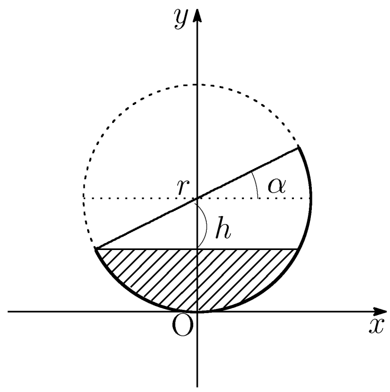
また，(2) の結果より，$\sin^2 t = \dfrac{9y^2}{16(x+1)^2}$.　$\cdots$ ④

③，④を辺々加えると，$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
だから，$\dfrac{(5x+2)^2}{16(x+1)^2} + \dfrac{9y^2}{16(x+1)^2} = 1$.
これより，$(5x+2)^2 + 9y^2 = 16(x+1)^2$.
整理して，$\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$.
(1) の結果を考慮して，
中心が $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$，半径が $\left(\dfrac{4}{3}\right)$ の円の
$y \geqq 0$ の部分である.



問 17　曲線 $x^2+(y-r)^2=r^2 \quad (0 \leqq y \leqq r)$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の形をした容器に水が満たされている．この容器を図に示すように角度 α だけ傾けると，水がこぼれて水面が h だけ下がった．

(1) h と α の関係を示せ．



解　$h=r\sin\alpha$.

(2) 容器を角度 α だけ傾けたとき，容器に残った水の体積 V を α の関数として表せ．

解　水面の y 座標は $r-h$．V はこの曲線の $0 \leqq y \leqq r-h$ の範囲を y 軸の周りに 1 回転させた立体の体積となる．

$x^2+(y-r)^2=r^2$ より，$x^2=r^2-(y-r)^2=2ry-y^2$．よって，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{r-h} \pi x^2\,dy = \pi\int_0^{r-h}(2ry-y^2)\,dy = \pi\left[ry^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{r-h} \\ &= \pi\left(r(r-h)^2-\frac{1}{3}(r-h)^3\right) = \frac{1}{3}\pi(r-h)^2(3r-(r-h)) \\ &= \frac{1}{3}\pi(r-h)^2(2r+h). \end{aligned}$$

$h=r\sin\alpha$ だから，

$$V=\frac{1}{3}\pi(r-r\sin\alpha)^2(2r+r\sin\alpha)=\frac{1}{3}\pi r^3(1-\sin\alpha)^2(2+\sin\alpha).$$

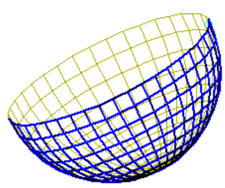
(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，容器に残った水の体積は，容器を傾ける前の水の体積の何倍か求めよ．

解　$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ より，

$$V=\frac{1}{3}\pi r^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\pi r^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{5}{8}=\frac{5}{24}\pi r^3.$$

元の水の体積は半球で $\dfrac{2}{3}\pi r^3$ だから，求める倍率は，$\dfrac{\left(\dfrac{5}{24}\pi r^3\right)}{\left(\dfrac{2}{3}\pi r^3\right)}=\dfrac{5}{16}$(倍).

コメント　数学Ⅲ教科書 p.157 練習 2 と同じ問題でした．



問 18　n は自然数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ および $A^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ を求めよ．

解 $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$A^2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=A\cdot\left(A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

これより，$A^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を満たす数列の一般項 a_n を n を用いて表せ．

解　$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$ とおくと，$a_{n+1}-\alpha=3a_n-3\alpha$ より，
$a_{n+1}=3a_n-2\alpha$.
$a_{n+1}=3a_n+2$ と定数項を比較すると，$\alpha=-1$.
よって，漸化式は $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ と表せる．

$b_n=a_n+1$ とおくと，b_n は初項 $b_1=a_1+1=1+1=2$，公比 3 の等比数列となるから，$b_n=2\cdot 3^{n-1}$.
よって，$a_n=b_n-1=2\cdot 3^{n-1}-1$.

(3) (2) の漸化式は $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}$ と書けることを利用して，$A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を求めよ．

解　$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\1\end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\1\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_{n-1}\\1\end{pmatrix}$.

これを繰り返して，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a_1\\1\end{pmatrix}$.

$a_1=1$，また (2) から $a_{n+1}=2\cdot 3^n-1$.

よって，$A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3^n-1\\1\end{pmatrix}$.

(4) A^n を求めよ.

解　(1) から $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, (3) から $\begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

と表せる.

行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると, B の逆行列は存在して,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

①式の両辺に B^{-1} を右からかけると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} &= A^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= A^n B B^{-1} = A^n. \end{aligned}$$

よって, $A^n = (A^nB)B^{-1} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

コメント　数列と行列の融合問題です.
最後の解 A^n には $n = 1$ を代入して, 確認するように.

$n = 1$ のとき,

$$A^1 = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^1 & 3^1 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, 問題に提示された A になります.

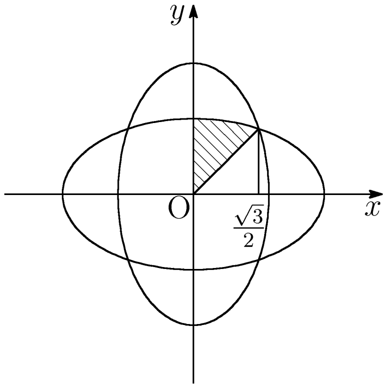
問 19　2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ で囲まれる共通部分の面積を求めよ．

解　2 つの楕円の第 1 象限の交点の x 座標を求めると，$\dfrac{x^2}{3}+x^2=1$ より，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ より，$y^2=1-\dfrac{1}{3}x^2$．第 1 象限部分は，$y=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}x^2}$．

求める部分は x 軸，y 軸，直線 $y=x$，$y=-x$ について対称だから，

この面積を S とすると，



$$\frac{1}{8}S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}\,dx-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x\,dx$$

となる．

まず，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}$．

次に，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}\,dx$ は，$x=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，

x が $0\to\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，θ は $0\to\dfrac{\pi}{6}$．また，$dx=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$．

$$\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}\cdot3\sin^2\theta}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta\quad(x\geqq0,\ y\geqq0)$$

よって，

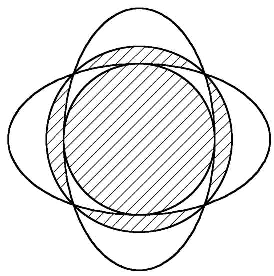
$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\theta\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta=\sqrt{3}\left(\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{3}{8}.$$

これらより，$\dfrac{1}{8}S=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi+\dfrac{3}{8}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$．よって，$S=\dfrac{8\sqrt{3}}{12}\pi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$．

コメント　求める部分は半径 1 の円（面積 π）に外接し，半径 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ の円（面積 $\dfrac{3}{2}\pi$）に内接しています．



$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\fallingdotseq1.15\cdots$ だから，解は 2 つの円の面積の間の値になっています．

問 20　xy 平面において，原点 O を極とし，x 軸の正の部分を始線とする極座標 (r, θ) に関して，極方程式 $r = 1 + \cos\theta$ によって表される曲線 C を考える．ただし，偏角 θ の動く範囲は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

(1) 曲線 C 上の点で，y 座標が最大となる点 P_1 の極座標 (r_1, θ_1)，および，x 座標が最小となる点 P_2 の極座標 (r_2, θ_2) を求めよ．

解　点 P_1 について．$y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta$ より，

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta = -\sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta$$
$$= (\cos^2\theta - 1) + \cos\theta + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1).$$

$0 < \theta < \pi$ の範囲で $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となるのは，$2\cos\theta - 1 = 0$，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

増減表は次の通り．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	極大 $(\frac{3\sqrt{3}}{4})$	$\searrow$	0

これより，y は $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ で最大となり，

このとき，$r = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$.

よって，P_1 の極座標は $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

次に，点 P_2 について．$x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta$ より，

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\cos\theta - (1+\cos\theta)\sin\theta = -2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = -\sin\theta(2\cos\theta + 1).$$

$0 < \theta < \pi$ の範囲で $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となるのは，$2\cos\theta + 1 = 0$，すなわち，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$.

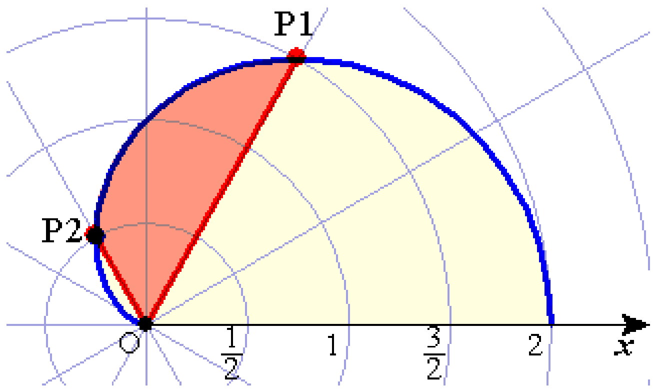
増減表は次の通り．

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	2	$\searrow$	極小 $(-\frac{1}{4})$	$\nearrow$	0

これより，x は $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ で最小となり，

このとき，$r = 1 + \cos\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{1}{2}$.

よって，P_2 の極座標は $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\pi\right)$.



(2) 上の (1) の点 P_1，P_2 に対して，2 つの線分 OP_1，OP_2 および曲線 C で囲まれた部分の面積 S は $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$ となることが知られている．S の値を求めよ．

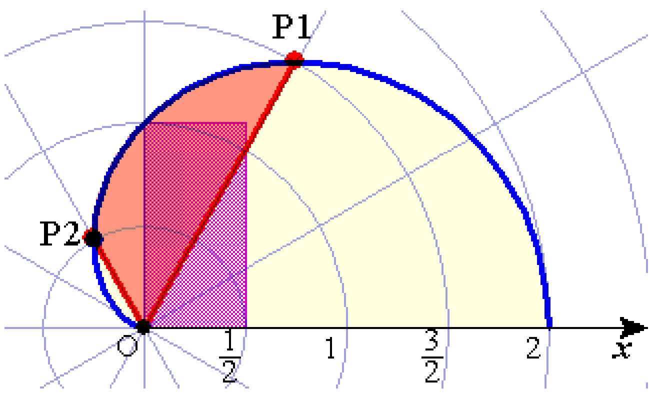
解

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\pi+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

コメント　数学C教科書に載っている**カージオイド**（の上半分）です．

(2) は授業でも取り上げた極座標のままで積分する問題ですが，問題中に式は示されています．これは，極座標のままでの積分はいちおう高校の範囲外だから．

例によって，解のおおまかな数値を確認してみます．
$\dfrac{\pi}{4}\fallingdotseq\dfrac{3.14}{4}=0.785$，$\dfrac{\sqrt{3}}{8}\fallingdotseq\dfrac{1.732}{8}=0.216$ として，$S\fallingdotseq 0.57$ です．下の図の長方形の面積が 0.5 ですから，だいたいいい感じ．



ちなみに，カージオイドの上半分と x 軸で囲まれる部分の面積は，
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi+0+0\right)=\frac{3}{4}\pi$$
で，カージオイド全体では $\dfrac{3}{2}\pi$ となります．

問 21 円柱形の缶を金属板で作りたい（缶は両端とも金属板のフタで閉じている）．缶の容積を一定とした場合に，缶の製作に要する金属板を最小で済ませるには，底面の直径 d と高さ h との比をどのようにすればよいか．その比を求めよ．ただし，金属板の厚さは無視できるものとする．

解 缶の容積を V, 表面積を S とする．

$$V=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h=\frac{\pi}{4}d^2h \text{ より，} h=\frac{4V}{\pi d^2}.$$

S を d の関数として表すと，

$$S=2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2+\pi dh=\frac{\pi}{2}d^2+\pi dh=\frac{\pi}{2}d^2+\pi d\frac{4V}{\pi d^2}=\frac{\pi}{2}d^2+\frac{4V}{d}.$$

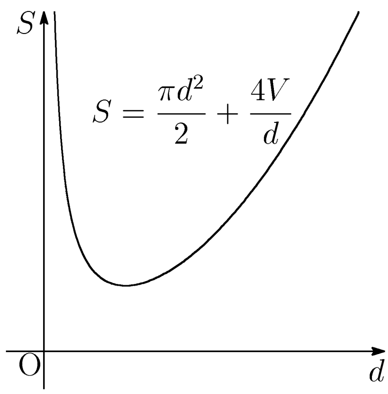
V は一定だから，S を d で微分すると，

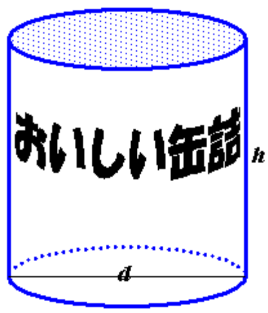
$$S'=\pi d-\frac{4V}{d^2}=\frac{\pi d^3}{d^2}-\frac{4V}{d^2}=\frac{\pi}{d^2}\left(d^3-\frac{4V}{\pi}\right).$$

d, h, V はすべて正なので，$S'=0$ となるのは $d^3=\dfrac{4V}{\pi}$ のときで，このとき S は最小となる．すなわち，

$$d^3=\frac{4V}{\pi}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}d^2h\right)=d^2h$$

であるから，$d=h$ となり，したがって， $d:h=1:1$.





コメント 切り取ったあとの残りの金属板はどうするのでしょうか？ もとの金属板の形は関係ない？ つまり,「缶の製作に要する金属板を最小で済ませる」という条件の他に,「原料の金属板から裁断した残りが少なくなるようにする」という条件もあるのではないかと思います．切り残しの金属板は溶かして再利用するということにして，ここでは考慮しないことにしておきましょう．

実際にはこの解にかかわらず，飲料用の缶は手で握れる太さに作りますし，調理済みの食品用の缶はそのまま皿にあけずに食べることも考慮して平たくなっています．だからといって，こういう問題が無意味ということにはならないでしょう．

余談ですが，この問題で使っている変数は d なので S を d で微分した式は $\dfrac{dS}{dd}$ と書けます?! $\cdots$ ん，何だこれは！

問 22　xy 平面上で原点を中心とする $\dfrac{\pi}{3}$ の回転移動を表す行列 A と y 軸に対する対称移動を表す行列 B はそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である．いま，確率 p で表，確率 $1-p$ で裏の出るプラスチックの皿を投げ，表が出れば行列 A，裏が出れば行列 B を選ぶ試行を考える．この試行を 2 回繰り返し，1 回目に選ばれた行列を T_1，2 回目に選ばれた行列を T_2 として，$T=T_2T_1$ で表される移動を考える．

(1) 行列 T で表される移動が恒等変換，すなわち平面のすべての点をその点自身に移す移動となる確率を求めよ．

解　すべての点が自分自身に移るのは，1 回目，2 回目共に y 軸対称移動となったときで，それ以外はない．よって，この確率は $(1-p)^2$．

(2) 行列 T で表される移動により，点 $(1,\sqrt{3})$ が移される点をすべてあげ，それぞれの点に移る確率を求めよ．

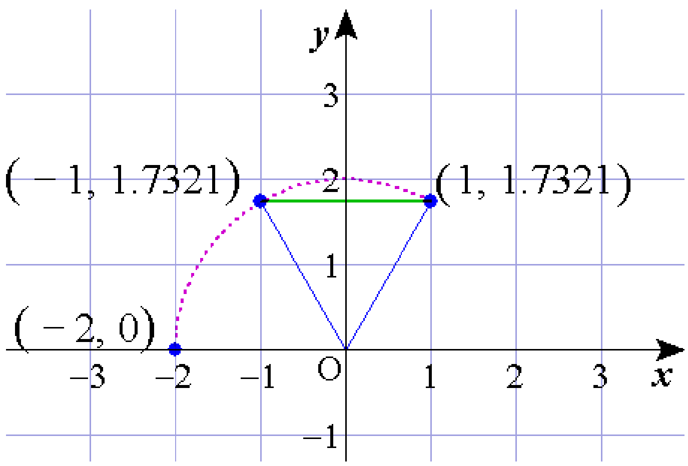
解　移動のパターンは次の 4 通りある．

(i) 1 回目 $\dfrac{\pi}{3}$ 回転，2 回目 $\dfrac{\pi}{3}$ 回転の場合，p^2 の確率で $(-2,\ 0)$ に移る．

(ii) 1 回目 $\dfrac{\pi}{3}$ 回転，2 回目 y 軸対称の場合，$p(1-p)$ の確率で $(1,\ \sqrt{3})$ に移る．

(iii) 1 回目 y 軸対称，2 回目 $\dfrac{\pi}{3}$ 回転の場合，$(1-p)p$ の確率で $(-2,\ 0)$ に移る．

(iv) 1 回目 y 軸対称，2 回目 y 軸対称の場合，$(1-p)^2$ の確率で $(1,\ \sqrt{3})$ に移る．



重複する点をまとめると，移される点は，$(-2,\ 0)$ と $(1,\ \sqrt{3})$ で，
$(-2,\ 0)$ に移される確率は，$p^2+(1-p)p=p$，
$(1,\ \sqrt{3})$ に移される確率は，$p(1-p)+(1-p)^2=1-p$.

(3) 行列 T で表される移動により，点 $(1, \sqrt{3})$ が移される点の x 座標の期待値を p で表せ．またこの期待値が 0 となるような p の値を求めよ．

解　(2) より，x 座標の期待値は

$$(-2)\times p+1\times(1-p)=-2p+1-p=1-3p.$$

期待値が 0 となるのは $1-3p=0$ より，$p=\dfrac{1}{3}$.

コメント　(1) は「平面上のすべての点」について，(2) は「ある特定の点」についての移動を考えています.

公開版あとがき

この「数学Ⅲ・C」は高校と同様に，数学Ⅲ，数学Cを最初から学ぶ生徒のための講座です．Ⅰ期，Ⅱ期それぞれの学習のまとめとして，入試問題を解き，答案を受講生どうしで検討するという授業を行いました．ここに集録した問題は，この授業に使用したものです．

目的は次の通りです．

- 生徒が自分の答案を発表し，また，他の生徒の発表を聞き，参考にすることにより，答案の文章表現，発表力などのコミュニケーション能力を培う．
- 高校での「期末テスト」に相当するものとして，生徒の理解および教師の指導に対する確認を行う．（ただし，ここでは評点は付けない．）

一斉授業に対しての個別指導に注目が集まる昨今ですが，これらだけではカバーできない相互学習・協同学習も重要です．大学進学後の授業やゼミではグループでの学習，作業，発表等を行うことになります．仕事に就いた場合も同様です．特に理工系の分野でチームワークは欠かせません．新指導要領で重視される「言語活動」に関する指導にも適しています．[1] また，大学入試に限っても自分の答案を他の生徒と一緒に検討することで，客観的により良い答案が書けるようになるのです．

課題は事前（２週間程度前）に配布し，当日までに答案を作成してもらいました．発表用には使用済みのポスターやカレンダーの裏に大きな字で書くことにしました．夏期には当日に書き写しをしたので，これに時間がかかってしまいました．冬期は事前に発表担当の問題を決め，各自発表用の答案を準備してきてもらうことで，当日の時間を節約しました．要した時間は，夏期は約３時間，冬期は約４時間でした．このため，この授業は生徒が出席する他の授業と重ならないように，普段の授業日とは別の日に設定しました．

当初は私の顔をうかがいながら発表していた生徒たちでしたが，しだいに生徒どうしで質問や意見を交わすようになりました．解答に誤りがあったり，部分的に未完成だった場合でも，他の生徒の指摘や私のヒントによって，その場で解き直しをしたり，自主的に他の生徒が代わって発表するということもありました．聞くだけという生徒もいましたが（なにぶん予備校教師に強制力はないので），相互学習の効果は認められるでしょう．

私の解答例（「模範解答」とは言いません），コメントのプリントは生徒の発表，相互質問の後に渡しました．コンピュータによる作図，動画，数表などもその際に提示しました．

2012 年 3 月 7 日
よしだ はじめ

[1]「高等学校学習指導要領」文部科学省，2009，p.45，数学第３款３ (3) 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり，議論したりすること。

解説提示用ファイル一覧

ファイル名	動作
Q6_極大極小_上智大.gps	GRAPES
Q7_級数と定積分_愛媛大.gps	GRAPES
Q8_不定積分_関西大.gps	GRAPES
Q11b_微分と不等式_大阪府大.gps	GRAPES
Q11c_級数と定積分_日本女子大.gps	GRAPES
Q12_楕円とベクトル_山形大.gps	GRAPES
Q14_視角_千葉大.gps	GRAPES
Q15_接線と面積_東北学院大.gps	GRAPES
Q16_媒介変数曲線_中央大.gps	GRAPES
Q19_楕円の定積分_山口大.gps	GRAPES
Q20_極座標で微積分_大阪市大.gps	GRAPES
Q21_円柱缶_信州大.gp3	3D-GRAPES
Q22_行列と確率_龍谷大.gps	GRAPES
Q12_楕円ベクトル_山形大.ggb	GeoGebra
Q14_視角_千葉大.ggb	GeoGebra
Q1_級数_岡山理科大.xls	Excel
Q11c_級数と定積分_日本女子大.xls	Excel

- 上記の各データファイルの著作権は作者にありますが，商用の場合を除き，自由にご利用いただけます.
- GRAPES，3D-GRAPES は友田勝久氏の開発によるフリーソフトです.

  http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/

  からダウンロードできます.
- GeoGebra はダイナミック図形フリーソフトです.

  http://www.geogebra.org/

  からダウンロードできます．日本語版を使っています.
- Excel はマイクロソフト社の製品です.