2011 年度 千葉県公立高校入学試験 前期（2011 年 2 月 15 日実施）

数学 第 4 問の解答と解説

— 仕切りのある水槽に水を入れたときの水位の変化のグラフ —

吉田　一 [*0]　（2011.04.05 第 0.99b 版）

1　考え方と解答

(1) グラフを読み取って，式を求めます．グラフは原点 $(0, 0)$ を通る直線なので，式は $y = ax$ という正比例の式になります．$x = 2$ のとき $y = 5$ であることから，[*1]

$$y = \frac{5}{2}\,x$$

と表せます．これが (1) の解です．

$\dfrac{5}{2}$ は 1 分間あたりの水の高さ（水位）y の変化の割合を表します．これを**水位の変化率**といいます．単位をつければ，$\dfrac{5}{2}\,\mathrm{cm}/$分 です．また，グラフでは直線の傾きを表します．水位の変化率は言い換えれば，水位の変わる（上がる）速さです．ですから，

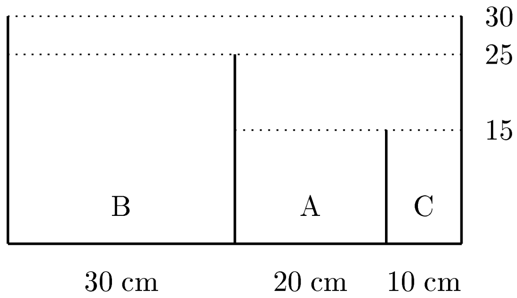
$$\textbf{距離} = \textbf{速さ} \times \textbf{時間}$$

の式と同じように

$$\textbf{上がった水位} = \textbf{水位の変わる速さ} \times \textbf{時間}$$

と考えます．[*2]

(2) 問題では，仕切りで 3 つに区切った中央の部分を **A** としてありました．他の部分にも名前をつけます．容器の図の左側の横 30 cm の部分を **B**，右側の横 10 cm の部分を **C** とします．



[*1] このほか，$x = 12$ のとき $y = 30$，$x = 10$ のとき $y = 25$ など．

[*2] ここでは，グラフと結びつけて水位の変化で考えていきますが，注がれる水の量で考えることもできます，容器の底面積は $60\,\mathrm{cm} \times 20\,\mathrm{cm} = 1200\,\mathrm{cm}^2$ なので，1 分間に注がれる水の量は $\dfrac{5}{2}\,\mathrm{cm} \times 1200\,\mathrm{cm}^2 = 3000\,\mathrm{cm}^3$ となります．すなわち，水は 1 分間あたり $3000\,\mathrm{cm}^3$，あるいは毎分 3 L（リットル）の割合で注がれます．

Step 1　各部分の水位の変化率を求める

水平に置いた直方体の容器に一定の割合で水を入れていくとき，容器の底面積が半分になれば，水位は 2 倍の速さで上昇します．つまり，底面積と水位の変化率は反比例します．容器の奥行き（底面の縦）は一定の 20 cm なので，容器の横の区切った長さと水位の変化率が反比例することになります．区切った容器の各部分の底面積の比は次の通りです．

$$\text{容器全体} : \mathbf{B} : \mathbf{A} : \mathbf{C} = 6 : 3 : 2 : 1$$

したがって，水位の変化率は

$$\text{容器全体} : \mathbf{B} : \mathbf{A} : \mathbf{C} = 1 : 2 : 3 : 6$$

になります．ただし，これは水が仕切りの淵に到達するまでの話です．

(1) で，容器全体に水を入れたときの水位の変化率は $\frac{5}{2}\,\text{cm/分}$ でした．これより，各部分の水位の変化率は次のように計算できます．

$$\mathbf{B}\,;\quad \frac{5}{2}\times 2 = 5\,\text{cm/分},\qquad \mathbf{A}\,;\quad \frac{5}{2}\times 3 = \frac{15}{2}\,\text{cm/分},\qquad \mathbf{C}\,;\quad \frac{5}{2}\times 6 = 15\,\text{cm/分}$$

また，水が **A** と **C** の境の仕切りの淵に達した後，**A** と **C** の水位が同時に上がるときの水位の変化率は，**A** と **C** の底面積の和が **B** と同じなので，5 cm/分 です．

Step 2　水が注がれている場所を特定する

水は **A**，**B**，**C** のどの部分に注がれているのでしょうか．

まず，**図 4** のグラフをみると，最初の 2 分間（$x = 0$ から $x = 2$ まで）は，**A** の水位は 0 のままです．これから，

・水が注がれているのは **A** ではない

ことがわかります．

次に，**C** かどうかを確かめます．**C** の部分の水位の変化率は，15 cm/分 でした．**A** と **C** の境の仕切りの高さは 15 cm です．ですから，ここは 1 分間でいっぱいになります．あふれた水は **A** に入るので，1 分後から **A** の水位が上がることになります．しかし，**図 4** のグラフでは，1 分後以降も **A** の水位は 0 のままです．これから，

・水が注がれているのは **C** でもない

ことがわかります．

以上から，

・水が注がれているのは **B** である

と確定できます．[*3]

[*3] 問題には「ある一箇所から水を入れ」とありますが，ちょっとイジワルに「仕切りのちょうど境目から水を注いで，2 つの部分に同時に入れる」ということも考えられます．しかし，この問題ではどちらの仕切りの境目から水を入れても **A** に入ってしまうことになり，最初から **A** の水位が上がるので，境目はありえないことがわかります．

Step 3　水位の変化の状態と所要時間を求める

B に水が注がれることから，各部分の水位が変化するようすは，次のようになります.

(i) まず，水は **B** に入り，**B** の水位が上がる.

(ii) **B** の水位が **A** との仕切りの高さ 25 cm になると，水は **A** にあふれ出し，**A** の水位が上がる.

(iii) **A** の水位が **C** との仕切りの高さ 15 cm になると，水は **C** にあふれ出し，**C** の水位が上がる

(iv) **C** の水位が仕切りの高さ 15 cm になると，**A** と **C** の水位が同時に上がる.

(v) **A** と **C** の水位が **B** との仕切りの高さ 25 cm になると，全体の水位が上がる.

表 1

	B	**A**	**C**
(i)	↗	→	→
(ii)	→	↗	→
(iii)	→	→	↗
(iv)	→	↗	
(v)	↗		

次に，(i) 〜 (v) のそれぞれにかかる時間（所要時間）を求めます.

$$\text{所要時間} = \frac{\text{上がった水位}}{\text{水位の上がる速さ}}$$

の式を使います.

(i) **B** の水位が 0 cm から 25 cm まで 増加する．水位の変化率は，5 cm/分.
よって，所要時間は，25 cm ÷ 5 cm/分 = 5 分．すなわち，$x = 0$ から $x = 5$ の間.

(ii) **A** の水位が 0 cm から 15 cm まで 増加する．水位の変化率は，$\frac{15}{2}$ cm/分.
よって，所要時間は，15 cm ÷ $\frac{15}{2}$ cm/分 = 2 分．すなわち，$x = 5$ から $x = 7$ の間.

(iii) **C** の水位が 0 cm から 15 cm まで 増加する．水位の変化率は，15 cm/分.
よって，所要時間は，15 cm ÷ 15 cm/分 = 1 分．すなわち，$x = 7$ から $x = 8$ の間.

(iv) **A** と **C** の水位が同時に 15 cm から 25 cm まで 10 cm 増加する.
水位の変化率は，5 cm/分.
よって，所要時間は，10 cm ÷ 5 cm/分 = 2 分．すなわち，$x = 8$ から $x = 10$ の間.

(v) 容器全体にわたって，水位が 25 cm から 30 cm まで 5 cm 増加する.
水位の変化率は，$\frac{5}{2}$ cm/分.
よって，所要時間は，5 cm ÷ $\frac{5}{2}$ cm/分 = 2 分．すなわち，$x = 10$ から $x = 12$ の間.

Step 4　グラフをかく

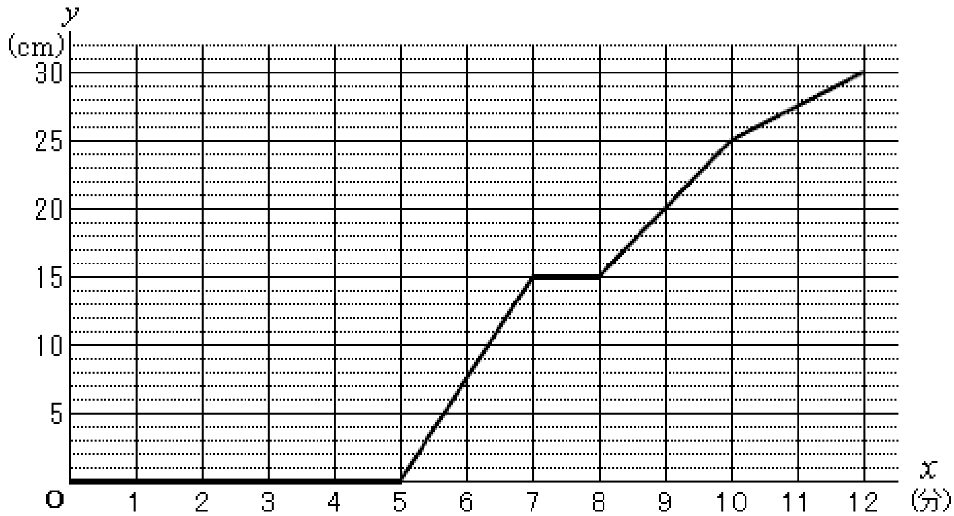
求めたデータからグラフをかきます．**表 1** をもとに，グラフにあわせて時間の流れを横方向にとるようにし，次のような関数表をつくります．

表 2

<table>
<tr><td colspan="2">x (分)</td><td>0</td><td>$\cdots$</td><td>5</td><td>$\cdots$</td><td>7</td><td>$\cdots$</td><td>8</td><td>$\cdots$</td><td>10</td><td>$\cdots$</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="3">y (cm)</td><td>B</td><td>0</td><td>↗</td><td>25</td><td>→</td><td>25</td><td>→</td><td>25</td><td>→</td><td>25</td><td rowspan="3">↗</td><td rowspan="3">30</td></tr>
<tr><td>A</td><td>0</td><td rowspan="2">→</td><td>0</td><td>↗</td><td>15</td><td>→</td><td>15</td><td rowspan="2">↗</td><td rowspan="2">25</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0</td><td>0</td><td>→</td><td>0</td><td>↗</td><td>15</td></tr>
</table>

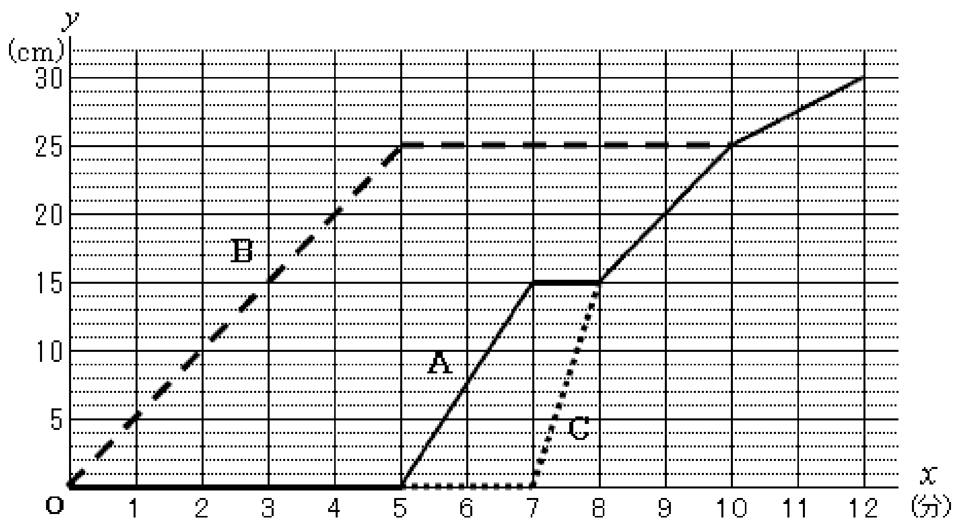
表 2 の **A** の行から，次のようなグラフができます．これが (2) の解です．

(2)解



B，**C** での水位のグラフも，同様に考えてかくことができます．参考として，すべての部分の水位の変化のグラフをかいてみました．

参考



2 コメント

昨年度の第５問に引き続き，新指導要領のキーワード「数学の活用」,「表現」[*4] を意識した１次関数とグラフに関する出題でした．昨年度の問題は距離に関しての速さでしたが，今年度の問題は水位（水の溜まる高さ）に関しての速さに変わりました．[*5]

出題意図は理解できます．悪くありません.「中学の１次関数の授業ではここまで教えていない」との批判もありますが，部分的に分割すればすべて学習するはずの内容なので，教えていないことに対する応用力を問われる問題があってもよいはずです.

しかし，配点をみると，第１問の計算問題も１題５点，教師でも解答に時間のかかるこの問 (2) も５点です．これでは，高得点が必要な一部の高校の受験生を除いて，このような「考える問題には手をつけない」という対策・指導が成り立ってしまいます．それでは，この問題の出題意図は生かされません.

文部科学省の「全国学力・学習状況調査」では知識，技能を見るためのＡ問題と，思考，表現，活用を見るためのＢ問題に分かれています．ほんとうに思考力，活用力を見たいのなら，このように別の時間帯に分けて考査を行う必要があるのではないでしょうか.

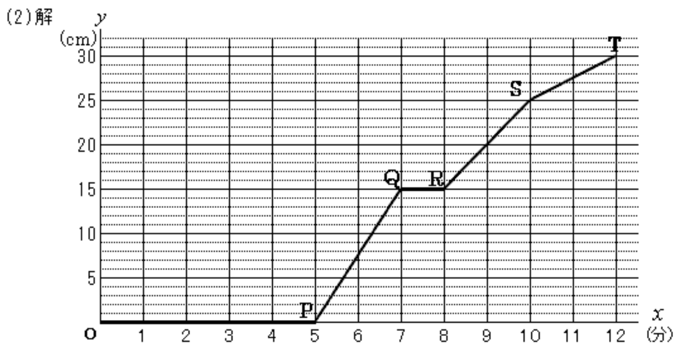
内容について，もう少し考察しましょう.

水を溜める状況での分かりやすさからいえば，水位よりも水量で考えるほうが良いのではないかと思います．つまり，$流率 = \dfrac{流量}{時間}$ です．この概念は水（液体）だけでなく，交通量などにも広く当てはまります．また，仕事などの速さは，中学入試の文章題や就職試験などではしばしば出題されます．どれも，１単位時間あたりの**何か**の変化率を表す「速さ」として統一的に認識しておくことが重要です．式で表すと

$$\textbf{何か}の変化率 = \frac{\textbf{何か}の総量}{時間}$$

です．しかし，中学校の授業では（練習問題なども含めて）この種の速さを扱う機会は少ないのではないでしょうか．それで，距離と同次元の水位として出題しているのかもしれません.

この問題では，区間ごとに区切って１次関数を考えますが，区間ごとに式で表す必要はありません．右図の点Ｐ～Ｓの各点での変化を考えます．だから，１次関数というよりも,「部分的正比例」です．そしてこの見方は，微分における「局所的正比例」の概念へとつながるものとなります.



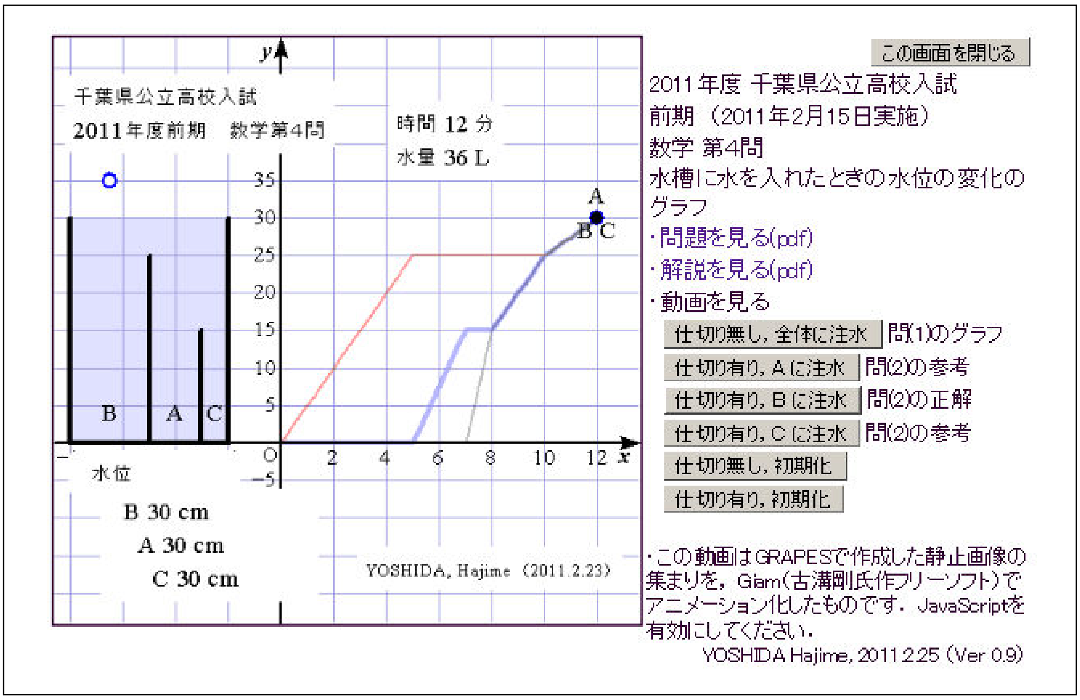
[*4]表現には「言語表現」のほか,「グラフ」も含まれます.

[*5]今年度から行われた後期試験（3 月 2 日実施）では，このような問題は出題されませんでした.

[*0]よしだ はじめ，河合塾講師・千葉県数学教育協議会委員長・千葉県在住

動画プログラムについて

容器に水が注がれていく図と同時にグラフもできていく動画プログラムを作成しました．GRAPES [*6] で作成した画像を Giam [*7] で動画ファイルとし，ブラウザソフトだけで閲覧できるようにしたものです．[*8] 正解の場合のほか，間違った場所に水を注いだ場合の図・グラフも表示できます．



提供ファイル	`11chiba-hs-math4.zip`	web 版のすべてのファイルを zip 型式に圧縮
	`11chiba-hs-math4.gps`	GRAPES ファイル（web 版の動作には不要）
展開ファイル	`11chiba-hs-math4.html`	起動ファイル
	`11chiba-hs-math4-x.gif`	画像ファイル（”x” は 0, 1, 2, 2a, 2b, 2c）
	`11chiba-hs-math4-q.pdf`	問題文
	`11chiba-hs-math4-a.pdf`	解説文（この文書）
	`readme-11chibamath.txt`	実行の手引き

- **利用方法**： 圧縮ファイル `11chiba-hs-math4.zip` を展開します．展開したフォルダ内の起動ファイル `11chiba-hs-math4.html` をブラウザで開いてください．
- **利用条件**： 作者は著作権は放棄しませんが，非商用に限り，自由にご利用ください．再配布も自由ですが，元のクレジット表示を改変しないでください．
- **補足**： web 版のもとになった GRAPES ファイルを実行するには GRAPES 本体が必要です．友田氏のサイトからダウンロードしてください．(`GRAPES` で検索)

[*6]友田勝久氏作のグラフ作成・プレゼンテーション用のフリーソフト．
[*7]古溝剛氏作の Gif アニメーション作成用のフリーソフト．
[*8]問題，解説文書を見るためには pdf 閲覧ソフトも必要です．