2010 年度 千葉県公立高校入学試験（2010 年 2 月 25 日実施）

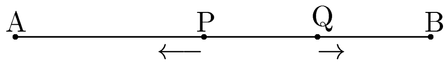
数学 第 5 問の解答と解説 — 往復運動する 2 点間の距離の変化のグラフ —

吉田　一 [*0] (改訂 2011.04.21)

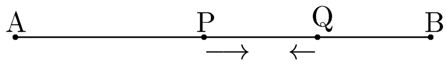
1　考え方

点 P の速さは毎秒 15 cm です．点 Q の速さを毎秒 v cm とします．問題文から $0 < v < 15$ です．P と Q の動きは次の 4 つの場合に分けられます．この 4 種類だけです．[*1]

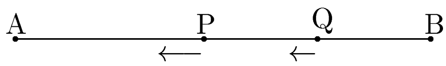
① P と Q が逆の方向に進んでいて，P と Q が離れていく場合



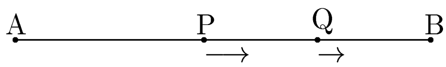
② P と Q が逆の方向に進んでいて，P と Q が近づいていく場合



③ P と Q が同じ方向に進んでいて，Q から P が離れていく場合



④ P と Q が同じ方向に進んでいて，P が後ろから Q に近づいていく場合



そして，これらのそれぞれは**図 2** のグラフの傾きに対応しています．グラフの傾きは PQ 間の距離の変化の割合を表します．言い換えると，P と Q の相対的な速さです．[*2]　この相対的な速さが正なら P と Q はしだいに離れていく状態であり，負なら P と Q はしだいに近づいていく状態です．この相対的な速さは次のように表せます．

① $15 + v$　　② $-15 - v = -(15 + v)$　　③ $15 - v$　　④ $v - 15$

ところで，$0 < v < 15$ なので，値の正負は次のようになります．

① $15 + v > 0$　　② $-(15 + v) < 0$　　③ $15 - v > 0$　　④ $v - 15 < 0$

①と②の値，③と④の値はそれぞれ，絶対値が等しく，正負が逆です．また，①と③の値を比べると $0 < 15 - v < 15 + v$ であり，②と④の値を比べると $-(15 + v) < -(15 - v) < 0$ です．

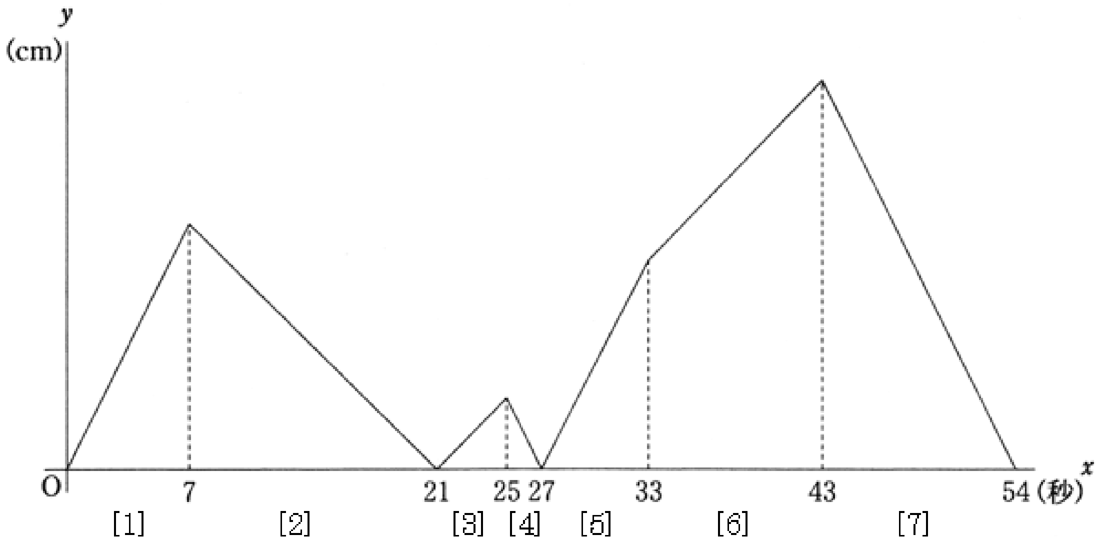
これを**図 2** のグラフの線分の傾きでみると，相対的な速さが正ならは右上がり，負なら右下がりであり，絶対値が大きければ傾きは急で，小さければ傾きは緩やかです．

[*1] 図では，A，B に対して P，Q が左右入れ替わった状態もあります．

[*2] 中学生にはちょっと難しいでしょうか？

	2 点の運動状態	2 点の相対的な速さ	グラフの傾き
①	逆の向き・離れる	$15+v$	右上がり・急 ↗
②	逆の向き・近づく	$-(15+v)$	右下がり・急 ↘
③	同じ向き・離れる	$15-v$	右上がり・緩 ↗
④	同じ向き・近づく	$-(15-v)$	右下がり・緩 ↘

この表とグラフを照らし合わせると，グラフの各区間に対して，P，Q の運動の状態がわかります.



	2 点の運動状態	2 点の相対的な速さ	グラフの傾き	グラフの区間
①	逆の向き・離れる	$15+v$	右上がり・急 ↗	[1]，[5]
②	逆の向き・近づく	$-(15+v)$	右下がり・急 ↘	[4]，[7]
③	同じ向き・離れる	$15-v$	右上がり・緩 ↗	[3]，[6]
④	同じ向き・近づく	$-(15-v)$	右下がり・緩 ↘	[2]

これによって，たとえば，P，Q の重なる（$y=0$ となる）$x=21$ では，P が Q を追い抜いたことがわかります．また，[1] から [2] に変わる $x=7$ では P，Q が反対向きに離れていく状態から，P が Q を後ろから追う状態になるので，$x=7$ では，P が A に着いて反転したことがわかります.

同じように考えていくと，すべての区間，区間の境で，P，Q がどういう状態になっているかを知ることができます．[*3]

[*3] ここでは P と Q が同時に A または B に着いて反転する状態は起きていません．こういう場合にはどんなグラフになるか，考えてみましょう.

2　解答例

点 Q の速さを毎秒 v cm とする．問題文の条件より，$0 < v < 15$ である．

(1)　まず，点 P は A（左）に，点 Q は B（右）に向かう．グラフから P が A に着くのと，Q が B に着くのと，どちらが早いかを考える．もし，Q が先に B に着いて折り返したとしても，$v < 15$ であるから，PQ 間の距離は変化のしかたは小さくなっても増加し続ける．しかし，グラフでは $x = 7$ で PQ の距離の変化は増加から減少に変わる．

したがって，この $x = 7$ が P が A に着く時刻である．すなわち，7 秒後.

(2)　P が A に着いてから B に着くまでの時間をグラフから考える．(1) より，$x = 7$ 以降 P は B に向かう Q を追いかけ，PQ の距離はしだいに縮まる．$x = 21$ で P は Q に重なり，追い越した後 PQ の距離はしだいに広がる．その後，PQ 間の距離が減少に変わる $x = 25$ が P が B に着く時刻である．これより，P が A から B に着くまでにかかった時間は，$25 - 7 = 18$ 秒である．

これより，AB の距離は，15 cm/秒 × 18 秒 = 270 cm.

(3)　まず，Q の速さ v を求めるため，Q が通過するどこか 2 点について，その間の距離と移動にかかる時間を求める．(2) より，P は $x = 25$ で B に着き，その後 A に向かう．P が B に向かう Q と重なるのは $x = 27$ のときで，ここまで 2 秒かかる．P が B からこの点までに進んだ距離は 15 cm/秒 × 2 秒 = 30 cm である．一方，$x = 27$ 以降も Q は B に向かい，30 cm 離れた B に着くのはグラフから判断して $x = 33$ だから，$x = 27$ から 6 秒間かかる．よって，Q の速さは，$v = \dfrac{30\ \text{cm}}{6\ 秒} = 5$ cm/秒 となる．

次に，Q が B に着く $x = 33$ での P の位置を求める．P が先に B に着くのは $x = 25$ だから，この 8 秒間に P が進む距離は，15 cm/秒 × 8 秒 = 120 cm である．これが $x = 33$ のときの PQ の距離で，$y = 120$ cm となる．

また，PQ 間の距離が減少に変わる $x = 43$ のとき，P は A に着く．このとき，Q が B に着いた $x = 33$ から 10 秒間経つので，この間に Q が進む距離は，5 cm/秒×10 秒 = 50 cm である．よって，このときの PQ の距離は，$y = 270 - 50 = 220$ cm となる．

したがって，$33 \leqq x \leqq 43$ のときの y の変域は，$120 \leqq y \leqq 220$.

【注 1】解答用紙には説明を書くスペースはなく，結果だけを書けばよいのですが，大学入試の記述試験では説明を書かないと点にならないので，そのつもりでの解答例です.

【注 2】(3) の第 1 段落「どこか 2 点」とは，位置と時刻がわかる 2 点なら他の点でもかまいません．いずれにしても，速さのわかっている P の 2 つの時刻に対して Q の位置を定め，時間と距離の関係から速さを求めます.

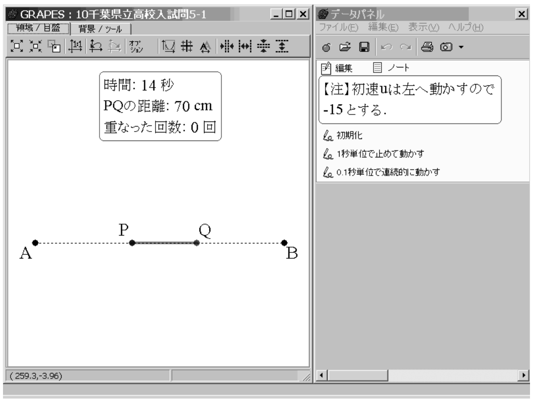
3　コンピュータで動画

運動のようすをイメージしてもらうため，コンピュータ動画を作りました．GRAPES [*4]を使っています．[*5]

・プログラム 1

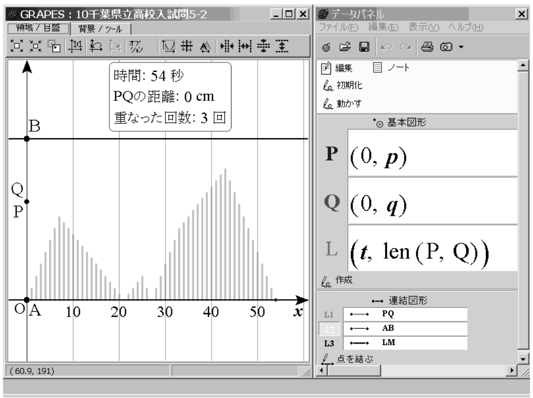
問題に提示された**図 1** を動かすものです．

解の数値にしたがってパラメータを設定してありますが，AB 間の長さや初期位置などの値を変えてみると，問題のような動きにはならないことも確かめられます．



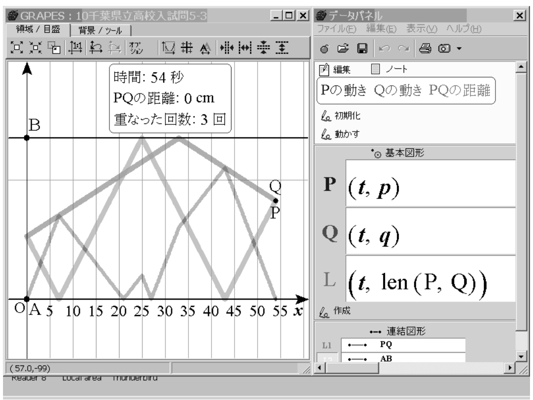
・プログラム 2

AB を縦に（y 軸），時間を横軸 (x 軸) にとって，時刻 x での PQ の距離を x 軸上に立てていきます．問題**図 2** のようなグラフ（ただし，x の値が 1 きざみの棒グラフ）ができていきます．



・プログラム 3

時刻 x での P，Q の位置をプロットしていきます．普通にみる時刻と位置の関係のグラフ（$s-t$ グラフ）です．PQ の差（距離）をプロットすれば，問題**図 2** のグラフになります．



	ファイル名
プログラム 1	10chiba-hs-math5-1.gps
プログラム 2	10chiba-hs-math5-2.gps
プログラム 3	10chiba-hs-math5-3.gps

[*4]友田勝久氏作成のフリーソフト．Web から入手できます．

[*5]なお，これらのプログラムでは，時間の刻み等のパラメータの変更によって，P が Q を追い越したのに重ならないこともおきますので，ご了承ください．

4 コメント

「傾向と対策」よりも「本質の理解」を

新指導要領を先取りしたような，文章とグラフの読解を必要とする新しい傾向の問題でした．とはいえ,「数学的活動」や「活用する態度」については現行指導要領（今年の高校受験生対象）にもちゃんと記載されています．[*6]

１次関数と等速直線運動は中学２年の内容ですが，提示されたグラフは「１次関数の差の絶対値」のグラフで，厳密にいえば指導範囲外でしょう．でも，部分部分に場合分けして考えれば，けっして無理な問題ではないと思います.

解答例の注にも書いたように，実際の解答用紙には，解の数値だけを書けばよいことになっています．図形の証明は書かせているのですから，こういう説明も書かせたいものです．証明や説明は図形の世界に限ったものではありませんから.「言語活動」を重視する新指導要領のねらいでもあります．でも，採点の手間を考えると難しいのでしょうね.

もし，大学入試でこういう問題が出題されたとしたら，[*7] 解の数値だけを書いてもほとんど点はもらえないでしょう.（余白の計算を見て考慮してくれるかもしれませんが $\cdots$ ）きちんと説明できて，点がもらえます．ということで，記載した解答例は大学入試の記述式を想定しました.

ところで，この問題の配点は，小問3題各5点で15点です．第１問の単純な計算問題も各5点です．考えるのに必要な時間を考慮すると，この問題の配点は少ないような気がします．といって，こちらの配点を上げると，得点が減ってしまう受験生も少なからずいるのでしょうか.

このような問題は今後も続きそうですが,「対策」としてではなく，本質的な理解と文章表現を大切にした指導をしていきたいものです.

[*6]1998年中学校数学指導要領　第1 目標
数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。

[*7]実際，中学までの範囲で出題される大学入試問題もあります．また，この手の問題は，大学卒の就職試験にもあります.

[*0]よしだ はじめ，河合塾講師・千葉県数学教育協議会委員長・千葉県在住