1　因数分解

整数係数の多項式の因数分解は $\boxed{\text{HOME}}$ $\boxed{\text{Factor(式)}}$ で分解することができる。

$x^2 - n$, $(n = 1.2.3.4.\cdots)$ が、整数を係数とする多項式の積に因数分解できるのは、自然数 n がどのような数の場合であるか?

この問題については、電卓で計算するまでもなく、n が平方数の場合であることは容易に想像がつくであろう。

n が平方数であるならば、$x^2 - n$ は整数を係数とする多項式の積に因数分解できることの証明は簡単であるが、その逆の証明はできますか?

Report

$x^2 - n$ が整数を係数とする多項式の積に因数分解できるならば n が平方数であることを証明せよ。

因数分解を考えるとき、因数分解が可能なのか否か。可能ならば、そのような n はどのような形の自然数なのか？また可能な n はその形の数しかないのか否か。そのことをきちんと数学的に証明できるのか否か。このようなことを探求するのが数学の進む道なのです。

Activity

$x^4 - n$, $(n = 1.2.3.4.\cdots)$ が、整数を係数とする多項式の積に因数分解できるのは、自然数 n がどのような数の場合であるか?を探求せよ。

Activity

$x^2 + n$, $(n = 1.2.3.4.\cdots)$ が、整数を係数とする多項式の積に因数分解できるのは、自然数 n がどのような数の場合であるか?を探求せよ。

Activity and Discussion and Report

$x^4 + n$, $(n = 1.2.3.4.\cdots)$ が、整数を係数とする多項式の積に因数分解できるのは、自然数 n がどのような数の場合であるか?を探求せよ。

2　相加平均と相乗平均

$a > 0$,$b > 0$.$c > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことは承知であろう。

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号は $a = b$ のときに成り立つ。

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

等号は $a = b = c$ のときに成り立つ。

次のような問題に対して、2 通りの解答がある。

$x > 1$ のとき、$x^2 + \dfrac{4}{x}$の最小値を求めよ。

解答 1 $x^2 > 0$,$\frac{2}{x} > 0$ より、相加平均と相乗平均の関係をもちいて

$$x^2 + \frac{4}{x} = x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \geqq 3\sqrt[3]{x^2 \times \frac{2}{x} \times \frac{2}{x}} = 3\sqrt[3]{4}$$

等号は $x^2 = \frac{2}{x}$ のときに成り立つ。これを解くと $x = \sqrt[3]{2}$

よって、$x^2 + \frac{4}{x}$ は $x = \sqrt[3]{2}$ のとき、最小は $3\sqrt[3]{4}$ となる。

解答 2 $x^2 > 0$,$\frac{4}{x} > 0$ より相加平均と相乗平均の関係をもちいて

$$x^2 + \frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{x^2 \times \frac{4}{x}} = 2\sqrt{4x}$$

等号は $x^2 = \frac{4}{x}$ のときに成り立つ。これを解くと $x = \sqrt[3]{4}$

$x = \sqrt[3]{4}$ のとき、不等式の右辺は $3\sqrt{4 \times \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{16}$ よって $x^2 + \frac{4}{x}$ は $x = \sqrt[3]{4}$ のとき、最小は $2\sqrt[3]{16}$ となる。

Activity

上の 2 通りの解答を吟味せよ。また間違いの原因はどこにあるかを調べよ。

3　レポート紹介

松浦　亘 解答 1，解答 2 を比較して，単純に最小値が 2 つあるのはおかしいと思い，解答 1 の x に解 2 の最小値をとる $x = \sqrt[3]{4}$ を代入すると，左辺 $= 5.03968$, 右辺 $= 4.7622$ で条件を満たす。

解 2 の x に解 1 の最小値をとる $x = \sqrt[3]{2}$ を代入すると，左辺 $= 4.7622$, 右辺 $= 4.48985$

ただし解 2 に最小値は $2\sqrt[3]{16}$ $(= 5.03968)$ と書いてあるので，$5.03968 > 4.7622$ により矛盾が生じるのでまちがっているのは解 2 である。

明確な説明としては，グラフ電卓で $y = x^2 + \frac{4}{x} \cdots\cdots$ ① ,$y = 2\sqrt{4x} \cdots\cdots$ ②,$y = 3\sqrt[3]{4} \cdots\cdots$ ③ の 3 つのグラフを描かせると，次のようになる。

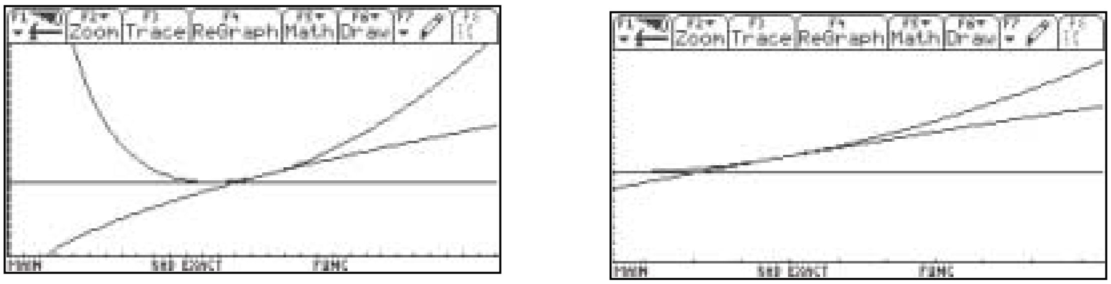

図 1: 3 つのグラフ

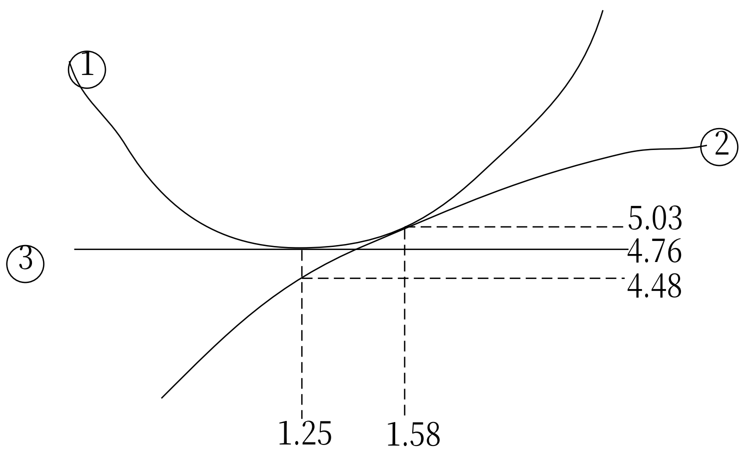

図 2: 3 つのグラフ

このグラフを見れば $y = x^2 + \frac{4}{x}$ の最小値が $y = 3\sqrt[3]{4}$ であることが視覚的にわかる。

また，間違いの原因として考えられるのは，解 2 の右辺に変数が混じっているということ。なぜなら，解 2 の最小値を求める作業は，$y = 2\sqrt{4x}$ と $y = x^2 + \frac{4}{x}$ の接点の y 座標を求める作業であると解釈できる。そうすると，傾きのあるグラフ (②のような）と①のような曲線の接点が A のようなところであるはずがない。
(なぜなら点 A を通る接線の傾きは 0)

先生からの一言

彼の言う通り、グラフを描けば視覚的に判りますね。確かに解 2 の方法は①と②の接点を求める作業です。微分して増減表を書けば判りますが、最小値をとる $x = \sqrt[3]{2}$ と最小値 $3\sqrt[3]{4}$ の点（$\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}$）は①のグラフの極小点になっています。確かにこの点での接線の傾きは 0 です。しかしアンダーラインの部分はおかしいですね。$y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフは A のようなところで接していますから。

廣田　雅人　**[1]** x^2-n の因数分解について

x^2-n が $(x+a)(x-b)$ に因数分解できたとすると（a,b は共に整数）

$$\begin{aligned} x^2-n &= (x+a)(x-b) \\ &= x^2+(a-b)x-ab \end{aligned}$$

これは x の恒等式なので $a=b$

よって $n=a^2$ となり x^2-n が因数分解できるとき，n は平方数である。

[2] x^2+n の因数分解について

$x^2+n=0$ とおくと，$x^2 \geqq 0$,$n>0$ より，この方程式は実数解を持たない。ところで x^2+n が，因数分解できるなら, $x^2+n=(x+a)(x+b)$ （a,b は共に整数）と変形できるはずだが，これだと $x^2+n=0$ に実数解がないことに矛盾する。したがって x^2+n は整数係数で因数分解できない。

[3] x^4-n の因数分解について

$x^4=0$ の解は図の 4 点である。

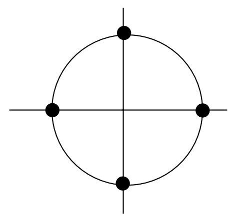

図 3: ガウス平面上の解

したがって

$$\begin{aligned} x^4-n &= (x-\sqrt[4]{n})(x+\sqrt[4]{n})(x-\sqrt[4]{n}i)(x+\sqrt[4]{n}i) && (1) \\ &= (x^2-\sqrt{n})(x+\sqrt{n}) && (2) \end{aligned}$$

よって n は平方数でないと（根号がはずれないので），x^4-n は整数を係数とする多項式の積に因数分解することはできない。

[4] x^4+n （n は自然数）の因数分解について

$x^4+n=0$ とおくと，$x^4 \geqq 0$,$n>0$ より，この方程式は実数解を持たない。

したがって，もし $x^4+n=(x+k)(x^3+\ell x^2+mx+n)$ （係数はすべて整数）の形に因数分解できるならば，$x^4+n=0$ は $x=-k$ という実数解をもつことになり矛盾する。

このことから，x^4+n が因数分解できるなら $x^4+n=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ （a,b,c,d は整数）の形になることがわかった。

この式の右辺を展開して

$$x^4+n=x^4+(a+c)x^3+(d+ac+b)x^2+(ad+bc)x+bd$$

この式 は恒等式なので

$$\begin{cases} a=-c & \cdots\cdots ① \\ b+d=-ac & \cdots\cdots ② \\ ad=-bc & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①③より $-cd=-bc$ よって $d=b$

これと①②より $2b=a^2$ よって $b=\frac{a^2}{2}$

従って $x^4+n=(x^2+ax+\frac{a^2}{2})(x^2-ax+\frac{a^2}{2})$

これより　$n=\frac{a^4}{4}$ となり、これを満たす数ならば x^4+n は因数分解することができる。

先生からの一言

[3][4] でガウス平面を使ったので説明が簡単になっていますね。[3] の (1)(2) 式の間にもう一つ式を入れるともっと良い分析になったでしょう。つまり $(x-\sqrt[4]{n})(x+\sqrt[4]{n})(x^2-\sqrt{n})$ を入れるのです。まず虚数がでないようにすると考えるのです。この式から n が（整数）の 4 乗ならば、3 つの式に分解できます。そして（2）式から君の言うように、n が（整数）の平方数ならば 2 つに分解できます。先ほども述べましたが、[4] はガウス平面を考えたので「分解できるなら 2 次式× 2 次式しかない」ということが簡単に説明できていますね。連立方程式を解くところでちょっとミスをしています。①③からは $c=0$ の場合もでてきますよ。それから最後の結論ですが、もう少しすっきりした表現はないのでしょうか。表現の仕方を考えて欲しいところです。

稲住　肇　[**1**] x^2-n の分解については、廣田君と同じなので省略

[**2**] x^4-n の分解について

x^4-n が整数係数の多項式に因数分解できるなら

（1 次式）×（3 次式）$\cdots\cdots$①

（1 次式）×（1 次式）×（2 次式）$\cdots\cdots$②

（1 次式）×（1 次式）×（1 次式）×（1 次式）$\cdots\cdots$③

（2 次式）×（2 次式）$\cdots\cdots$④

以上 4 つの形に分解できる可能性がある。以下係数はすべて整数とする。

① のとき

$$x^4-n=(x+a)(x^3+bx^2+cx+d) \qquad =x^4+(a+b)x^3+(c+ab)x^2+(d+ac)x+ad$$

これを係数比較で調べると（途中計算は省略します）$b=-a$,$c=a^2.d=-a^3$,$a^4=n$ となる。

従って n が 0 以外の整数の 4 乗の数ならば分解可能である。

$n=a^4$ を代入すると　$x^4-a^4=(x+a)(x-a)(x^2+a^2)$ となり、これは②の形になる。①と②は展開しているかいないかの違いだけなので②の形のときも、n が 0 以外の整数の 4 乗の数ならば分解可能である。

③のとき

$$x^4-n=(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ac+ad+cd+bc+bd+ab)x^2+(abc+abd+bcd+acd)x+abcd$$

この恒等式を係数比較で調べると $b+c+d=-a$ $\cdots\cdots$③

$ac+ad+cd+bc+bd+ab=a(b+c+d)+cd+bc+bd$ より $cd+bc+bd=a^2\cdots\cdots$ ④

$abc+abd+bcd+acd=a(cd+bc+bd)+bcd$ より $bcd=-a^3$ $\cdots\cdots$⑤

$abcd=-a^4=-n$ $\cdots\cdots$⑥

ところで③④⑤⑥を同時に満たす整数 a,b,c,d はあるのか?

b,c,d を解とする 3 次方程式を考える。

$(x-b)(x-c)(x-d)=x^3+(b+c+d)x^2+(bc+cd+bd)x-bcd=0$

$x^3+ax^2+a^2x+a^3=0$

$(x+a)(x^2+a^2)=0$

よって解 b,c,d は整数では存在しない。つまり③の形は無い。

④ のとき

$$x^4-n=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$
$$=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$$

再び恒等式の係数を比較して調べると

$a=0$ かつ $c=0$ かつ $b+d=0$ のときか，または $b=d$ のときに成立することがわかる。

しかし $b=d$ のときには $-n=\frac{a^4}{4}$ となって，a は整数，n は自然数なのでおかしい。

$a=0$ かつ $c=0$ かつ $b+d=0$ のときは $x^4-n=x^4-b^2$ となり，n が 0 以外の整数の平方数のとき分解できることがわかる。

以上の分析より n が 0 以外の整数の 4 乗かまたは平方数のとき，x^4-n は整数係数で因数分解できる。

[3] x^4+n の分解について x^4-n のときの考察と同じように調べていく。途中省略

④ のとき，$n=fraca^44$ となる。つまり整数の 4 乗を 4 で割ったときに自然数になれば分解可能である。このことより a は偶数でないといけない。$a=2k$ とすると　$n=4k^2$ (ただし k は 0 でない整数)

先生からの一言

最後の $n=4k^2$ (ただし k は 0 でない整数）という結論の書き方は大変いいですね。証明もきちんと場合分けができて結構です。