微分を眺めてみよう

0.1　微分に関する操作

[1] 関数 $y=f(x)$ を微分するには $\boxed{\text{Home}}$,$\boxed{\text{F3}}$ の differentiate を使う。（または $\boxed{\text{2nd}}$ に用意されたものを使用。$d(f(x),x)$ $\boxed{\text{enter}}$ で完了。変数の指定を忘れないこと。
[2] n 次導関数は $d(f(x),x,n)$ $\boxed{\text{enter}}$ で完了。特に n に負の数を入れると不定積分をします。
[3] 極限値を求めるには $\boxed{\text{Home}}$,$\boxed{\text{F3}}$ の limit() を使う。例えば $\lim_{x\to 0} f(x)$ は $limit(f(x),x,0)$ と入力する。
[4] 常用対数は $log(x)$ と入力する。自然対数は $ln(x)$ と入力する。
[5] e^x は $\boxed{\text{2nd}}$ に用意されているものを使用。

0.2　常用対数 e の定義

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \tag{1}$$

$$\lim_{h\to +\infty}(1+\frac{1}{h})^{h} \tag{2}$$

$$\lim_{h\to -\infty}(1+\frac{1}{h})^{h} \tag{3}$$

Activity

上の 2 つの関数のグラフを描かせて鑑賞せよ。

Activity

$y=\dfrac{\sin x}{x}$ と $y=\dfrac{1}{x}$ と $\dfrac{-1}{x}$ の 3 つのグラフを描かせることによって $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ と $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ の意味を鑑賞せよ。

0.3　テイラー展開

関数 $f(x)$ には n 次導関数が存在するとしよう。ここでは、三角関数の表、常用対数の底 e の値、などは本当はどのようにして作ったのだろう?ということを考えてみよう。

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n\\
f^{'}(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}\\
f^{''}(x) &= 2a_2+3\bullet 2a_3x+4\bullet 3a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}\\
f^{'''}(x) &= 3\bullet 2\bullet a_3+4\bullet 3\bullet 2a_4x+5\bullet 4\bullet 3a_5x^2+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}
\end{aligned}$$

一般に

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{n} \frac{k!}{(k-r)!} a_k x^{k-r}$$

さて，$f(0) = a_0$ かつ $f^{'}(0) = a_1$ かつ $f^{''}(0) = 2a_2$ かつ $f^{'''}(0) = 3 \bullet 2 \bullet a_3$
一般に

$$f^{(k)}(0) = r! a_r$$

よって　$a_0 = f(0)$ かつ $a_1 = f^{'}(0)$ かつ $a_2 = \frac{f^{''}(0)}{2}$ かつ $a_3 = \frac{f^{'''}(0)}{3!}$
一般に

$$a_r = \frac{f^{(k)}(0)}{r!}$$

以上により

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{r!}x^r + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{4}$$

Activity

[**1**] 式 (4) において，　$f(x) = \sin x$ とすると，どのような式ができるか?
[**2**] この式の左辺のグラフをと $y = \sin x$ のグラフを同時に描け。
[**3**] 2 つのグラフを観察することによって，式 (4) の意味を考えよ。

Activity

$y = \cos x$　　　,$y = e^x$　　　,$y = log_e x$ などの関数をテイラー展開し、そのグラフを描かせて鑑賞せよ。

Activity

[**1**] e^x のテイラー展開において、$x = 1$ を代入すれば、e の値を求めることができる。e の値を小数 100 桁まで求めよ。
[**2**] $\sin x$ のテイラー展開を元にして、$sin 1^\circ$ から $sin 10^\circ$ までを小数 20 桁まで求めよ。
[**3**] x の値が十分小さいときは、$\sin x$ と x はほぼ等しいことをグラフ電卓を用いて確認せよ。またこの場合十分小さいとはどの程度の値まででであるかを調べよ。

Activity

今回の一連の Activity を通して感じたこと、分かったこと、また自分で探求したことなどがあればレポートせよ。

0.4　レポート紹介

廣田雅人君 このレポートの目標は，$y=\sin x$ のテイラー展開を用いてほぼ完全に $y=\sin x$ と同じグラフを描くことである。

まず，$y=\sin x$ を x の 7 次の整関数になるように テイラー展開する。[注1]展開式は

$$y=-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+x$$

この式を $y=f(x)$ とする。

$y=\sin x$ と　$y=f(x)$ のグラフを同時に描くと次のようになる。

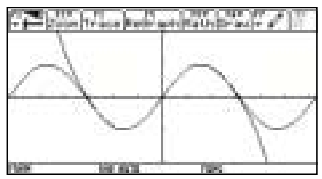


図 1: $\sin x$ と $y=-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+x$

この 2 つのグラフはほぼ 1 周期分重なる。

今度は　$y=f(x)$ と $y=f(x-2\pi)$ のグラフを描く。つまり $y=f(x)$ を右に 2π だけ平行移動したものを追加する。これで $y=f(x)$ と $y=f(x-2\pi)$ を 2 つ合わせると $-\pi$ から 3π までほぼ $y=\sin x$ と同じグラフができる。

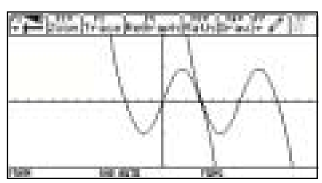


図 2: $f(x)$ と $f(x-2\pi)$

このことから,$y=f(x)$ を x 軸方向に 2π づつ平行移動したものを同時に描くと $y=\sin x$ のグラフになることがわかる。

さて $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に a だけ平行移動したものは $y=f(x-a)$ と表せる。

したがって $a=g(x)$ とおくとき $a=g(x)$ のグラフが次の図のようになれば良い。

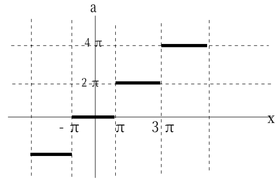


図 3: この関数が欲しい

[注1]taylor(sin (x),x,7) で展開してくれる

こうしておくと、$y = f(x - a)$ のグラフは $y = f(x)$ 　のグラフを $\pi < x \leqq 3\pi$ の範囲で x 軸方向に 2π 平行移動し，$3\pi < x \leqq 5\pi$ の範囲で x 軸方向に 4π 平行移動し，$5\pi < x \leqq 7\pi$ の範囲で x 軸方向に 6π 平行移動し，$7\pi < x \leqq 9\pi$ の範囲で x 軸方向に 8π 平行移動し............... を描く。

ところで図 (3) は $y = [x]$ のグラフとよく似ている。(注 記号 [ ] はガウス関数の記号)

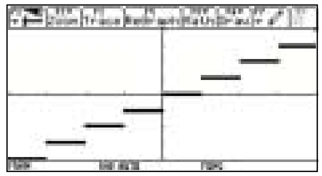


図 4: $y = [x]$ のグラフ

そこで $y = [x]$ から図 (3) のグラフを作ってみる。

2 つを比べると，$y = [x]$ を x 軸，y 軸方向に共に 2π 倍に拡大したものを x 軸方向に $-\pi$ 平行移動してあることがわかるので

$$a = 2\pi \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right]$$

とすればよい。

以上により目標とする関数の式は

$$y = f(x - 2\pi \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right])$$

であり，これは $y = \sin x$ と一致する。

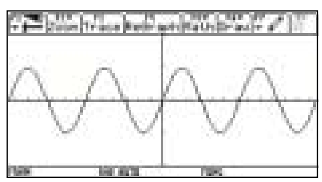


図 5: $y = f(x - 2\pi \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right])$ のグラフ

今度は 3 次のテイラー展開 $y = -\frac{x^3}{6} + x$ を利用して $y = \sin x$ とほぼ同じグラフを描いてみる。$y = -\frac{x^3}{6} + x$ を $y = h(x)$ とおく。この二つのグラフを描いてみると次のようになる。

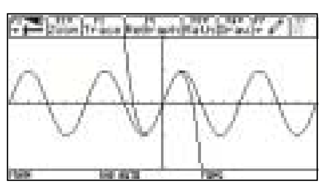


図 6: $y = f(x - 2\pi \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right])$ のグラフ

この 2 つのｐグラフは約 $\frac{1}{2}$ 周期の間重なる。

このグラフを x 軸方向に π だけ平行移動し、さらに x 軸で対称移動したもの

$$y = -h(x - \pi)$$

と表せる。

そこで $y = h(x)$ と $y = -h(x - \pi)$ のグラフを描くと

これで太い線の部分が $\sin x$ と重なる。

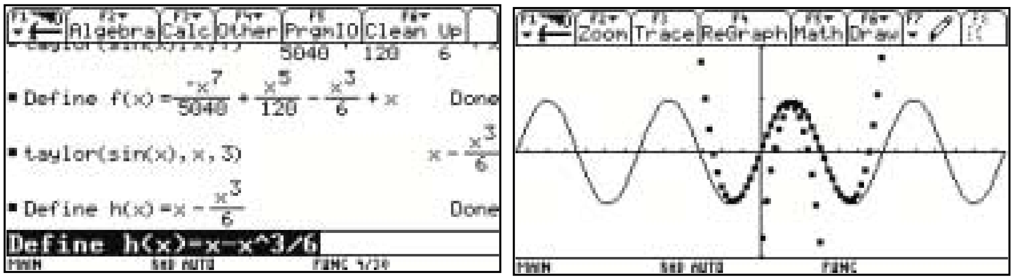


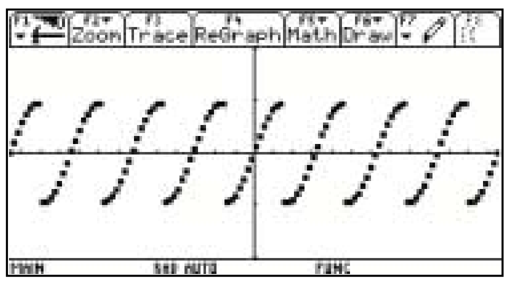
図 7: $y = h(x)$,$y = -h(x - \pi)$ のグラフ

このことより、$y = h(x)$ のグラフを順々に x 軸方向に 2π づつ平行移動していき、それらを交互に x 軸で対称移動したものを集めると $y = \sin x$ のグラフになることが判る。

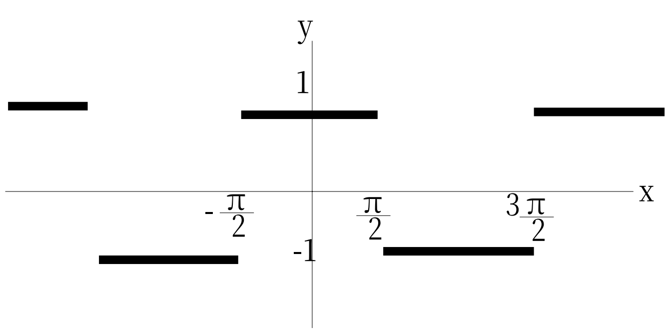
まず、$y = h(x)$ をさきほどと同じ操作で x 軸方向に平行移動したものだけのグラフの式は

$$y = h(x - \pi \left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right])$$

となる。これは次のようなグラフである。



さて、このグラフをひとつおきに x 軸対称するには次のようなグラフを乗ずれば良い。



この関数を $y = i(x)$ とすると、

$$y = h(x - \pi \left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right]) \times i(x)$$

は $y = \sin x$ と一致するはず。

ところでこれに似たグラフを考えると $y = (-1)^{[x]}$ がある。

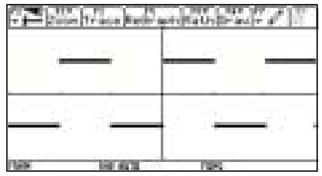


図 8: $y = (-1)^{[z]}$ のグラフ

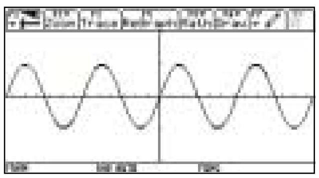
$y = i(x)$ はこのグラフを x 軸方向に π 倍拡大し、x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものなので $i(x) = (-1)^{[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}]}$ と表せる。

従って求める関数は

$$y = (-1)^{[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}]} \times h(x - \pi \left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right])$$

である。

次のグラフは最後にできあがった関数と $y = \sin x$ を同時に描いたものである。



しかし、このグラフは極値の付近でかなり大きな誤差が生じる。(拡大したグラフが右側）これは $y = h(x)$ と $y = \sin x$ のグラフが重なる部分が $\frac{1}{2}$ 周期より少し小さく $x = \pm\frac{\pi}{2}$ のところでは重ならないためである。従ってもっと精密なグラフを描きたいのなら $h(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$ にすればよい。

ただしもちろんこの場合はグラフを書くのにかかる時間が長くなってします。

$y = \cos x$ や $y = \tan x$ のグラフを描くときも $y = \sin x$ のときと同じようにすればよい。

少し話が変わるが、$y = \sin x$ のような漸近線のないグラフをテイラー展開するとき、展開したあとの関数が高次であればあるほど重なる範囲が広がって行くが、$y = \tan x$ のように漸近線のあるグラフの場合は高次であればあるほど、漸近線が正確になっていくが、漸近線を越えて重なることはなかったということである。$y = \tan x$ の場合は重なることができるのは 1 周期分だけであった。この原因は、漸近線上では微分できないからだと思う。

先生からの一言

テイラー展開は正確に近似しようと思えば、次数をどんどん大きくすれば良い。しかし小さい次数で、できるだけ多くを近似しようという発想もすばらしいですが、それを見事に解決している。しかも「こうなって欲しい」という意志がきちんとあって、それを実現するために、すでにある知識を実に巧みに利用している。ガウス関数がでてきたり $(-1)^{[x]}$ がでてきたり、読んでいても驚きの連続でした。これぞまさしく technology を使った数学の神髄ですね。ただ最後の予想は違うような気がします。定義域内の点であれば、微分可能とか不可能だとか論ずることは意味がありますが、漸近線というのは、本来グラフの一部ではありませんから、「漸近線上の点」は存在しませんね。おそらく　テイラー展開は整関数で近似しようとするわけですから、本来連続な関数でないと困りますね。ですから $\tan x$ の一部だけしか近似できないのでしょう。

笠間健一 e^x のテイラー展開において $x = 1$ を代入した。

この結果 $e = 2.71828180115\cdots\cdots$ という無理数になった。ところでこれは本当に無理数なのだろうか。

そこで e が無理数であることを証明しようと思う。

そもそも無理数とは $\sqrt{2}$ や π のようなもので、小数で表すと循環しない数である。これを（つまり循環しない）を証明すれば良い。しかしどうすればよいか判らなかった。

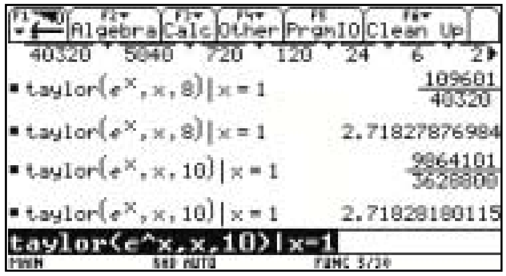


図 9: e^x の近似

そこで背理法を使ってみる。 $\boxed{\text{証明}}$

e は有理数であると仮定する。すると $e = \frac{a}{b}$ (a,b は整数) と書ける。

ところで e の定義は $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ であるからまず、$(1+\frac{1}{n})^n$ を二項定理を使って表すと

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= 1 + n \bullet \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \bullet (\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \bullet (\frac{1}{n})^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \bullet (\frac{1}{n})^4 + \cdots + (\frac{1}{n})^n \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \cdots + \frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

ここで $n \to \infty$ とすると分子はすべて 1 になる。

よって

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots$$

つまり

$$\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots \tag{5}$$

(5) 式の両辺に $b!$ を掛けると、

$$\text{左辺は}\frac{a}{b} \times b! = \frac{a}{b} \times 1 \times 2 \times 3 \cdots \times b = a \times (b-1)! \tag{6}$$

となる。(6) 式の右辺は整数の積なのでこれは整数である。

$$\begin{aligned}\text{右辺は} \quad &\{2 \times b! + 3 \times 4 \times 5 \times \cdots b + 4 \times 5 \times 6 \times \cdots \times b + \cdots + (b-1)b + b + 1\} \\ &+ \left\{\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

となる、。さて (7) 式の前半の括弧の部分は明らかに整数である。

また、明らかに $b \geqq 2$ なので (7) 式の後半の括弧の部分は整数でない。

(これは分数だから明らかだと最初は思 っ たが、ひ ょっ とすると整数になるかも知れないとあとで思 っ た。

この心配をきちんと示しておく。

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots$$

この右辺は無限に続くので無限級数である。しかしこのままでは計算できないので、無理矢理次のようにする。

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{3 \times 3 \times 3} + \cdots$$

こうすると、無限等比級数の和の公式が使えて

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\cdots \leqq \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

これで心配はなくなった。

以上により、e が有理数だと仮定すると、5 式の左辺は整数になって、右辺は整数でないとなって矛盾が生じる。

これで e が無理数であることが証明できた。

先生からの一言

あらゆる学問は「不思議だ」「本当だろうか」という疑問を徹底的に追求することから始まります。そういう意味ですばらしいレポートでした。二項定理や無限級数の和など学習した内容もうまく使えています。特に「両辺に $b!$ を掛ける」部分は、かなり苦労をしたと思いますが、君の大発見でしょう。また (7) 式の後半の括弧の部分の考えも、すばらしいと思います。