1　関数の定義

1.1　関数を自分で定義する

関数といえば、2 次関数や三角関数、対数関数など諸君は、すべて誰かが考えた関数を学んでいる。そもそも関数とは何だろう。

関数は単純に考えれば、自動販売機のような物である。お金を入れれば切符が出てくる。

今回は自分で便利な関数を作る経験をしてみよう。

[**1**] ◇ $\boxed{\text{HOME}}$ で $\boxed{\text{F4}}$ の 1.Define を選ぶ。
[**2**] $f(x) = x^2 + 3x$ を入力し、$\boxed{\text{enter}}$ を押すと、DONE つまり関数が記憶される。
[**3**] $f(3)$ $\boxed{\text{enter}}$ で x に 3 を代入した値が即座に計算される。

さて、変数は 1 つでなくてもよいのです。

新しい関数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 5y + 1$ を定義し、$f(1, 5)$ を計算させてみよう。

こんなこともできます。

中心と半径を代入すれば、その円の方程式が出てくる関数をつくることもできます。

[**1**] $Define\ \ cir(a, b, r) = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ と定義し、$\boxed{\text{enter}}$ を押すと記憶されます。
[**2**] $cir(1, 2, 3)$ $\boxed{\text{enter}}$ でうまく求められたことを確認しましょう。

Activity

点の座標と、直線の方程式が判っているときに、その点と直線の距離を計算する関数を定義し、それを確かめてみよう。

Activity

自分でおもしろそうな関数 (何か現実的に意味のある関数）を定義して、試してみよう。

1.2　組み込み関数

$\cos 48^\circ$ の値を電卓で求めてみよう。（これはできますね）

では $\cos x = 0.24$ となる x の値を求めてみよう。（これはどうすればでるのでしょうね）

次に $5^{1.7}$ を求めてみよう。

では $5^x = 3.8$ となる x の値を求めてみよう。

Discussion

$5^x = 3.8$ となる x の値を求める方法は他にないのでしょうか。教科書で習ったことを思い出して議論しましょう。

TI-92 には最初から様々な関数があらかじめ用意されています。これを組み込み関数といいます。

$\boxed{\text{2nd}}$ cos を押すと,$\cos^{-1}$ という関数が現れます。これは cos の逆関数です。

例えば $\cos^{-1} 0.5$ を入力して $\boxed{\text{enter}}$ を押すと 60 度と出てきますね。

Activity　AND REPORT

地球は完全な球面ではありませんが、ここでは完全な球面であり、その半径は 6578 ｋｍであると仮定します。地球上の 2 点の緯度と経度が判れば、その 2 点間の最短距離が判るはずです。飛行機が飛ぶのは通常この最短コースを飛んでいます。これを大圏コースと呼んでいます。では 2 点の緯度と経度を入力すると、その大圏コースの距離が即座にわかる関数をグラフ電卓に設定しましょう。ついでに Losangels(北緯 33 度、西経 118 度）と東京（北緯 36 度東経 140 度）間の大圏コースの距離を求めよ。

REPORT

私たちが生活しているのに、地球が丸いということをほとんど実感しませんね。東京大阪間の直線距離と大圏コースの距離はほとんど変わらないでしょう。では Losangels と東京の間に直線のトンネルを掘った場合、その距離はどれくらいになるでしょう。
このような楽しい問題を各自で作って、その結果から何か感じることがあればそれもレポートしましょう。

予備知識として以下のことが必要と考えられる。

[1] 球はどのような平面で切断しても、切り口は円である。
[2] 3 点を通る平面はただ一つ確定する。
[3] 空間座標、三角関数特に余弦定理、空間ベクトル、内積、逆関数
[4] 緯度、経度の設定方法と、方向づけ

経度は東経を正、西経を負、北緯を正、南緯を負と定義する。このとき球面上の点 A の緯度、経度を (α, β) とする。

地球の中心を空間座標の原点年、中心から赤道とグリニッジを通る経度の交点に向かう線を x 軸、中心から北極点に向かう線を z 軸、中心から赤道と東経 90 度の経度の交点に向かう線を y 軸にする。このとき、点 A の空間座標は $(r\cos\alpha\cos\beta, r\cos\alpha\sin\beta, r\sin\alpha)$ で表される。

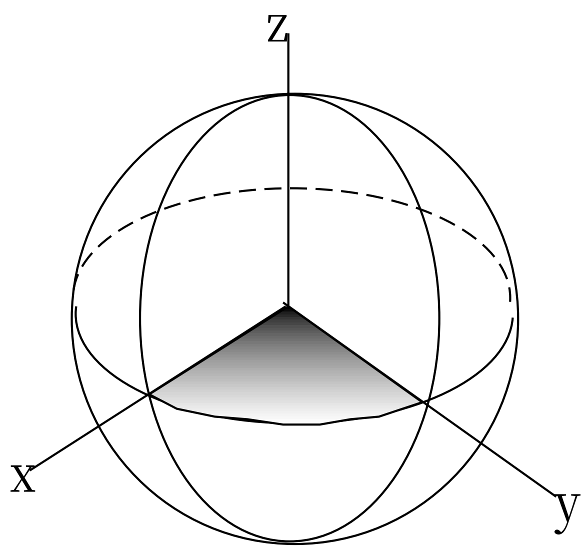


図 1: 座標の設定

従って中心から点 A に向かうベクトルの成分は $\overrightarrow{a} = (r\cos\alpha\cos\beta, r\cos\alpha\sin\beta, r\sin\alpha)$ である。
同様に点 B を (γ, δ) とすると、$\overrightarrow{b} = (r\cos\gamma\cos\delta, r\cos\gamma\sin\delta, r\sin\gamma)$ である。
$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

この式の分子は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} &= r^2\cos\alpha\cos\gamma\cos\beta\cos\delta + r^2\cos\alpha\cos\gamma\sin\beta\sin\delta + r^2\sin\alpha\sin\gamma \\ &= r^2\cos\alpha\cos\gamma(\cos\beta\cos\delta + \sin\beta\sin\delta) + r^2\sin\alpha\sin\gamma \\ &= r^2\cos\alpha\cos\gamma\cos(\beta-\delta) + r^2\sin\alpha\sin\gamma\end{aligned}$$

よって

$$\cos\theta == \cos\alpha\cos\gamma\cos(\beta-\delta) + \sin\alpha\sin\gamma \tag{1}$$

式（1）を満たす角 θ に対して $\widehat{AB} = 2\pi r\frac{\theta}{360^\circ}$ である。
よって以下のように関数を定義する。

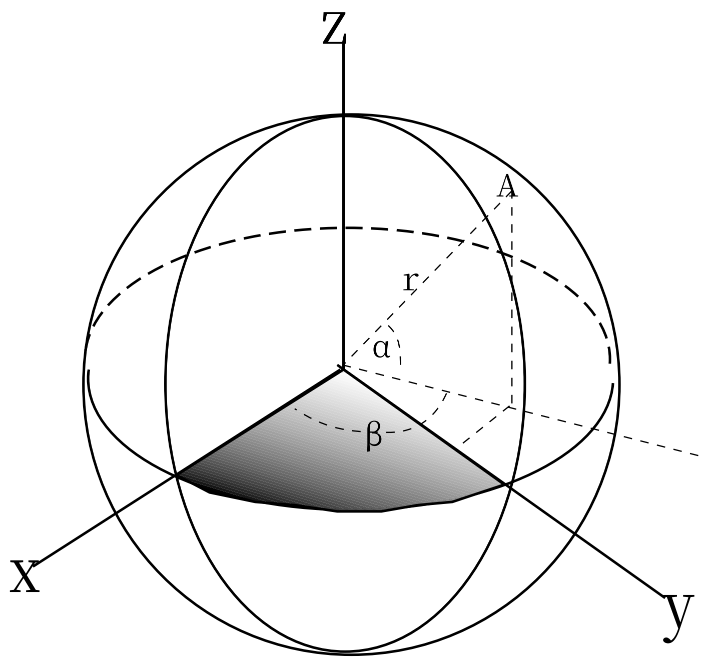
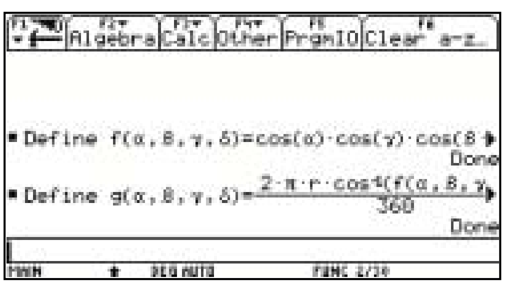
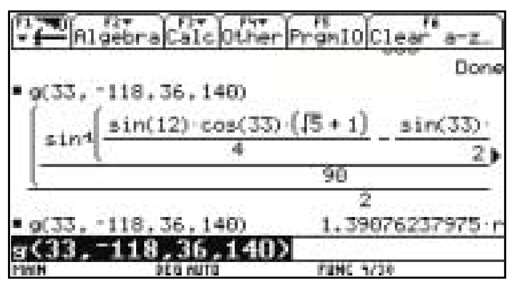


図 2: A の空間座標

$$Define\ \ f(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \cos\alpha\cos\gamma\cos(\beta-\delta)+\sin\alpha\sin\gamma$$

$$Define\ \ g(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{2\pi r\cos^{-1}\left(f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\right)}{360^\circ}$$





1.3 レポート

松浦　亘 レースシミュレーター

僕はよく夜中に TV で F1 などを見ていて何時まで続くのか判らなくなるときがあり、ちょうどよい機会なので作ってみようと思う。レースは常に一定の速度で走っているわけではなく、タイヤのタレや燃料の減少で重量が軽くなる等の遅くなったり、速くなったりの要素があります。

F1 は通常 305km を越える最小周回で終了するので、レースの距離を 305km に固定します。

また車の性能を客観的に見るために、決勝前日に行う予選の平均速度や戦略である 1 ストップや 2 ストップの周回数も要素に加えます。

① 総合周回数 $\longrightarrow a$

② タイヤのタレの時速に与える影響　$\longrightarrow b$

③ 予選の平均時速　$\longrightarrow c$

④ 燃料減少の時速に与える影響　$\longrightarrow d$

⑤ 1 ストップの周回　$\longrightarrow e$

⑥ 2 ストップの周回　$\longrightarrow f$ (ただし $e \leqq f < a$)

b 、d はそれぞれのコース（サーキット）の性質によって違うので、過去のデーターや TV からだいたいの値を出します。すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{e}(305 \div a) \div \left[\{1.0 - bn\} \times \{(0.95c) \times (1.0 + dn)\}\right] \\
&+\sum_{n=e}^{f}(305 \div a) \div \left[\{1.0 - b(n-e)\} \times \{(0.95c) \times (1.0 + d(n-e))\}\right] \\
&+\sum_{n=f}^{a}(305 \div a) \div \left[\{1.0 - b(n-f)\} \times \{(0.95c) \times (1.0 + d(n-f))\}\right]
\end{aligned}
$$

のような計算式になります。$0.95c$ の部分は予選の速度で走り続けることは無理なので、平均して予選の 9 割 5 分程度で走るとして 0.95 をかけたことを表しています。

ちなみに、1999 年 10 月 31 日に行われた鈴鹿サーキットのレースに当てはめてみると、$a = 53$ 、$b = 0.015$　、$d = 0.02$ とする。（これらのデータは 1998 年のもの）優勝者は $c = 216(km/h)$ 、$e = 19$ 周、$f = 38$ 周である。

上の計算式に当てはめてみると、値は 1.5246578 で、約 1 時間 31 分 25 秒というタイムになる。

実際には 1 時間 31 分 18 秒であり、なかなか正確な値が出た。(1 ストップの場合は e と f の値を同じにすればよい)

この式にはピットストップやピットレーンのロスタイムが入っておらず、おおざっぱなもので「周回遅れに邪魔される」などの肝心な要素は入っていない。その辺が反省点です。しかしこれを使えば何周にピットに入れれば一番速いか計算できます。

先生からの一言

実に面白いですね。私も e と f の値を色々変えて見ました。このピットインのタイミングが勝負を左右するのがよくシミュレートできていると思いました。

図 3: FI

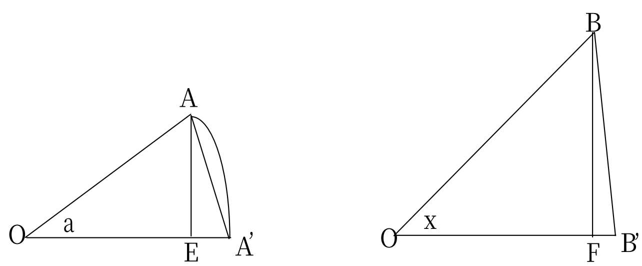
瀬戸直樹 ある点 A の緯度 a、経度 b 。ある点Bの緯度 x、経度 y 。球の半径 $M = 6578$

点 A と球の中心 O と経度 b の赤道上の点 A' の三角形を考える。A から OA' へ垂線を引き、この点を E とする。

$AE = M\sin a$, $OE = M\cos a$

同様に、点 B と球の中心 O と経度 y の赤道上の点 B' の三角形を考える。B から OB' へ垂線を引き、この点を F とする。

$BF = M\sin x$, $OF = M\cos x$



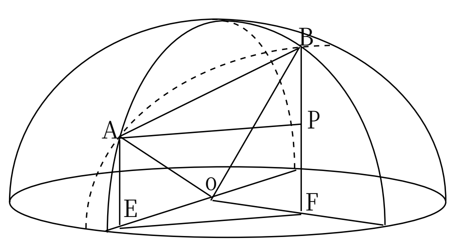
$\triangle AOE$ と $\triangle BOF$ を合わせて考える。$x > a$ のとき $\angle FOE = q$ とする。

余弦定理より $EF^2 = (M\cos a)^2 + (M\cos x)^2 - 2M(\cos a + \cos x) \times \cos q$ (注この式はまちがっています)

A から EF と平行な直線を引き BF との交点をPとすると $PA = EF$ で $BA^2 = \{M(\sin x - \sin a)\}^2 + EF^2$

$\triangle OAB$ で $\cos\angle BOA = \frac{2M^2 - BA^2}{2M}$ （注この式もまちがっています）

$\cos^{-1}\angle BOA = \angle BOA$



今の話は同じ半球上に A,B がある時です。

北半球と南半球のときは

$BP = BF + AE$ となるので $BA^2 = \{M(\sin x + \sin a)\}^2 + EF^2$

以上により、電卓に入れるときの未知数は (変数の間違いだろう) a, x, q で

$kuri(a, x, q) = \frac{2M^2 - BA^2}{2M}$ でこの式で $\cos\angle BOA$ が出る。

$pan(p) = \cos^{-1}\angle BOA \div 360° \times 2\pi M$ これで目的の長さがでる。

先生からの一言

せっかくの作品でしたが、基本的な余弦定理が正しく使えていません。残念でした。

溝畑勇介 地球上のどの 2 点を取っても、必ずその 2 点を通る円で切ることができる。その円で切って考える。

また、片方の点が 0 °の点になるように移動すれば考えやすい。

まず、A(緯度 a, 経度 0) の点と B(緯度 c, 経度 0) の点を考えると

大圏距離は $\frac{c-a}{360} \times 2\pi r$

次に A(緯度 0, 経度 b) の点と B(緯度 0, 経度 d) の点を考えるとこれも同じように、大圏距離は $\frac{d-b}{360} \times 2\pi r$

ところで東経、西経のことを考えないといけない。東経を正、西経を負とすると $|d - b|$ としたらいいと思う。北緯、南緯も同様に北緯を負、南緯を正として $|c - a|$ とする。

たまたまあった地球儀と相談しながら考えたところ、経度間の距離と緯度間の距離を別々に求め、三平方の定理でだそうと思う。膨らんだりしていて自信はないけど。

$DefineKm(a, b, c, d) = \sqrt{\left(\frac{|c-a|}{180}\pi r\right)^2 + \left(\frac{|d-b|}{180}\pi r\right)^2}$ と入力してみた。ちなみにこの式が合っていると仮定すると、ロスと東京の距離は

$$Km(33, -118, 36, 140) = 29622.4(km)$$

全部書き終わった後に気がついたが、例えば W165 と E165 のとき、$165 - (-165) = 330$ つまり最短距離になっていない。それで $|d - b| \geqq 180°$ のとき、東経を $+b$ とすると西経は $360° - b$ とおける。だから $|d - b| = |165 - (360 - 165)| = |-30| = 30$ となる。

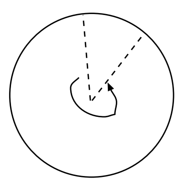


図 4: 最短か？

よってロスと東京は $|118 - (-140)| = 258 \geqq 180$ なので、$b = 360 - 140 = 220$ とおける。

また緯度は $180°$ より大きくならないので、今のままで良い。

よって $Km(33, 118, 36, 220) = 11715$

ますます自信がなくなった。

先生からの一言

いろいろと問題点がありそうですね。みんなで気になるところを追求してみましょう。

廣田雅人 地球の中心を $x-y-z$ グラフの (平面の間違い?) 原点 O とし、赤道を $x-y$ 平面にし、東経 $0°$ で赤道上の点の座標を $(6578, 0, 0)$ 北緯 $90°$ の地点の座標を $(0, 0, 6578)$ 東経 $90°$ の赤道上の点を $(0, 6578, 0)$ とする。

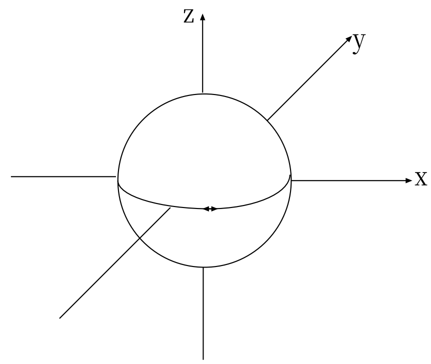


図 5: 座標の設定

A 点の経度を a、緯度を b , B 点の経度を c、緯度を d とする。

ここで a,c は正のとき東経を、負のとき西経を表し、b,d は正のとき 北緯を、負のとき南緯を表す。

このとき、A 点の座標は $(6578\cos a\cos b, 6578\sin a\cos b, 6578\sin b)$,

B 点の座標は $(6578\cos c\cos d, 6578\sin c\cos d, 6578\sin d)$ となる。

よって AB 間の直線距離を ℓ とすると

$$\ell^2 = 6578^2\left\{(\cos a\cos b-\cos c\cos dc)^2+(\sin a\cos b-\sin c\cos b)^2+(\sin b-\sin d)^2\right\}$$

$\triangle AOB$ において、$\angle AOB=\theta$ とすると、余弦定理から

$$\cos\theta=\frac{2\times 6578^2-\ell^2}{2\times 6578^2}$$

ここで $\cos\theta$ の逆関数を利用して θ を求める。

地球を一周すると $6578\times 2\pi\mathrm{Km}$, 移動することになるので、$AB$ 間の大圏コースを x とすると

$$x=\frac{6578\times 2\pi\times\theta}{360}=\frac{3289\pi\theta}{90}$$

$$\begin{aligned}&len(a,b,c,d)\\&=\frac{3289\pi}{90}\times\cos^{-1}\left[\frac{2-(\cos a\cos b-\cos c\cos d)^2-(\sin a\cos b-\sin c\cos b)^2-(\sin b-\sin d)^2}{2}\right]\end{aligned}$$

これに東京とロスの緯度経度を代入すると $len(140, 36, -118, 33) = 9148.3km$ となる。

上田侑正 地球の中心を原点、赤道面を xy 平面上に、経度 0 °が xz 平面上に来るようにする。半径 r の地球上の緯度 a °、経度 b °の点 A の座標を r, a, b で表すと（ただし、北緯は $a>0$ 、南緯は $a<0$ 、東経は $b>0$, 西経は $b<0$ とする。

図より、$A(r\sin a\cos b, r\sin a\sin b, r\cos a)$ と表せる。

よって緯度 c °、経度 d °の点 B と点 A との（直線）距離 ℓ は

$\ell^2 = r^2\left\{(\cos a\cos b-\cos c\cos d)^2+(\cos a\sin b-\cos c\sin d)^2+(\sin a-\sin c)^2\right\}$ ....①

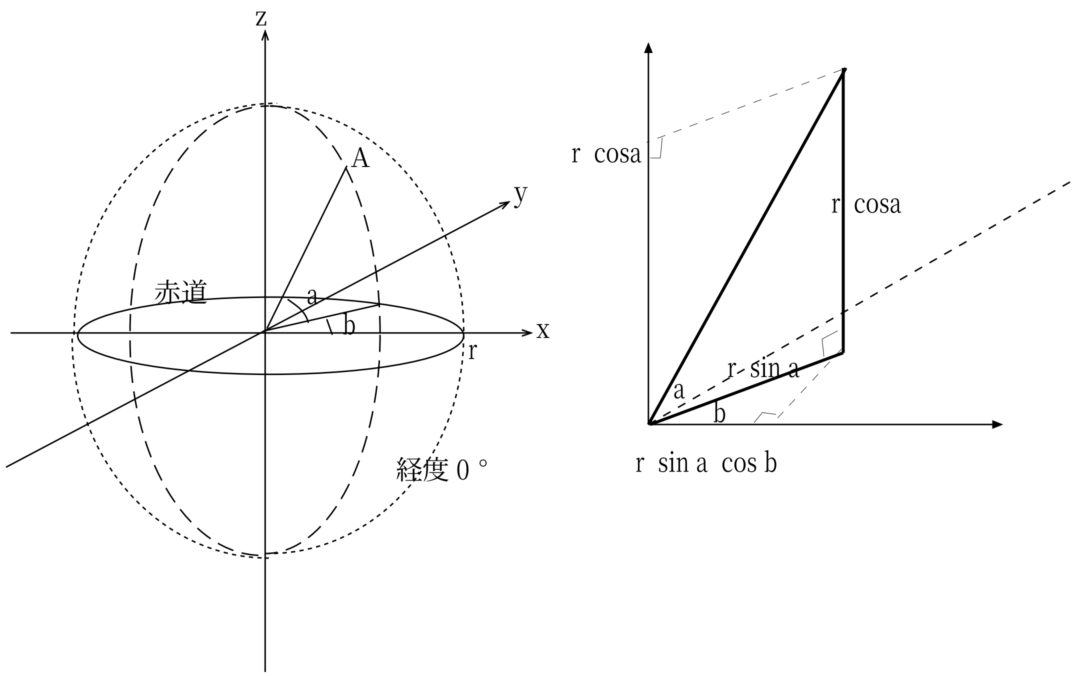


図 6: 上田君の図

となる。$\angle AOB = e$ とおくと、三角形 $\triangle AOB$ において、余弦定理より

$$\cos e = \frac{2r^2 - \ell^2}{2r^2}$$

$\therefore \quad e = \cos^{-1} \frac{2r^2-\ell^2}{2r^2}$......................②

求める大圏距離 L は $L = 2\pi r \frac{e}{360}$ である。

これに①,② を代入すると

$$L = \frac{\pi r}{180} \cos^{-1} \left[\frac{2 - (\cos a \cos b - \cos c \cos d)^2 - (\sin a \cos b - \sin c \cos b)^2 - (\sin b - \sin d)^2}{2} \right]$$

東京、ロサンゼルス間の大圏距離は $a = 33, b = -118, c = 36, d = 140, r = 6578$ を代入して $9148.43km$ となる。

先生からの一言

廣田君のと上田君のは、同じような考えです。最後の結果も同じです。でもこの二人の途中経過は少し違いますね。どちらが正しいのでしょう。

久保田千尋 地球を xyz 平面において考える。地球の中心を原点におく。x 軸の正の方向に経度 0° をとる。地球上の 1 点を (x, y, z) で表したい。

例えば南緯 30 °、東経 120 °の地点について考える。考えやすいように南緯 30 °を緯度 -30 °、東経 120 °を経度 120 °とおく。

緯度 -30 °、経度 120 °の点 P を (x, y, z) とおく。

① 地球を上から見ると、図（8）の左で、②経度 120 °の所と y 軸を含む平面で上から切断すると (図（8）の中央)、とりあえず $y = r\sin(-30)^\circ$ と判る。③ 地球を上から見る（図（8）の左）と②より、$0P' = r\cos(-30)^\circ$ だから P の x と z 座標は、$x = r\cos(-30)^\circ \times \cos 120^\circ$, $z = r\cos(-30)^\circ \times \sin 120^\circ$

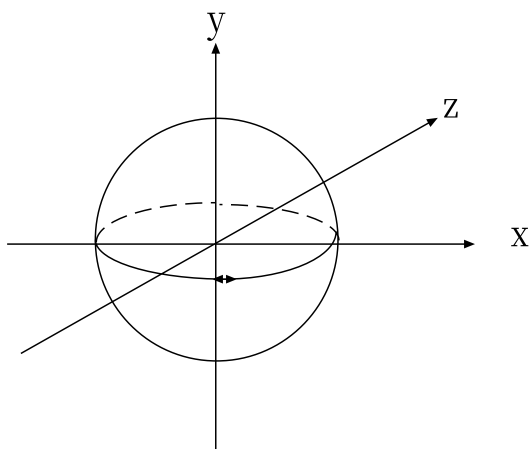


図 7: 座標軸の設定

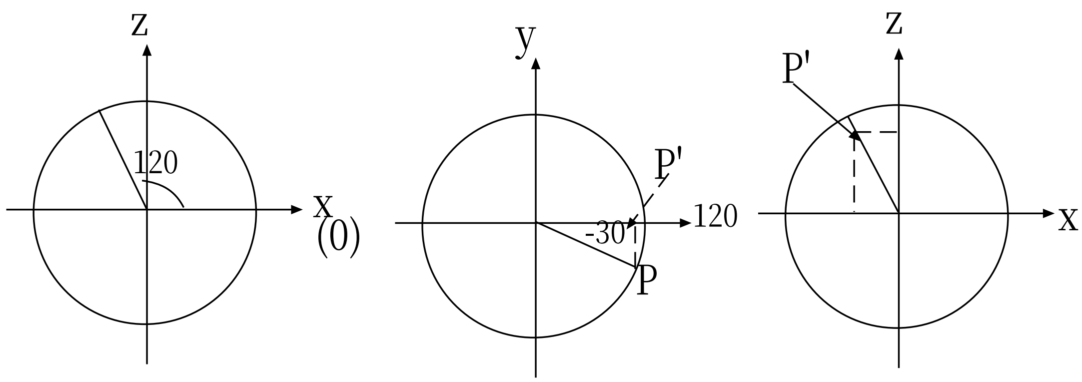


図 8:

よって

$$(x, y, z) = (r\cos(-30)^\circ \times \cos 120^\circ, \sin(-30)^\circ, r\cos(-30)^\circ \times \sin 120^\circ$$
$$= (-\frac{\sqrt{3}}{4}r, -\frac{1}{2}r, \frac{3}{4}r)$$

これらを球の方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ に代入して成り立つか調べる。

左辺 $= \frac{3}{16}r^2 + \frac{1}{4}r^2 + \frac{9}{16}r^2 = r^2 =$ 右辺

成り立つので球上にあることは確か。

これを一般化する。

$$\text{緯度}\alpha, \text{経度}\beta\text{の地点は}$$
$$(r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha, r\cos\alpha\sin\beta) \tag{2}$$

このあと、彼は　式 2 が、本当に正しいのかを別の点北緯 60 °、西経 45 °の点で図を書いて確認している。

緯度α, 経度βの地点 A と、緯度γ, 経度δの地点Bの直線距離を d とすると

$$d=\sqrt{(r\cos\gamma\cos\delta-r\cos\alpha\cos\beta)^2+(r\sin\gamma-r\sin\alpha)^2+(r\cos\gamma\sin\delta-r\cos\alpha\sin\beta)^2}$$
$$=\sqrt{r^2\left\{(\cos\gamma\cos\delta-\cos\alpha\cos\beta)^2+(\sin\gamma-\sin\alpha)^2+(\cos\gamma\sin\delta-\cos\alpha\sin\beta)^2\right\}}$$
$$=r\sqrt{(\cos\gamma\cos\delta-\cos\alpha\cos\beta)^2+(\sin\gamma-\sin\alpha)^2+(\cos\gamma\sin\delta-\cos\alpha\sin\beta)^2}$$

余弦定理より $\cos\theta=\frac{2r^2-d^2}{2r^2}$

これで後は、電卓で θ を求めようとしたが、できなかった。θ が判ると大圏コースを c として、$c=\frac{\theta}{360}\times 2\pi r$ で求められる。

> 先生からの一言
>
> えっ? ?? これで求められませんでしたか?でそうな感じですがね。

前田優介 まず図を参照。

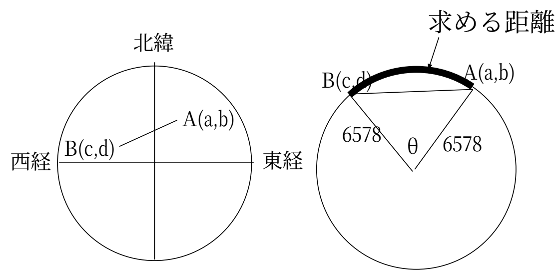


図 9: 前田君の図

求める距離は地球の一周の距離 $\times\frac{\theta}{360}$ である。

図（9）の左図より,A 地点、B 地点の距離 ℓ は

$$\ell=\sqrt{(\frac{180}{6578}\times a-\frac{180}{6578}\times c)^2+(\frac{90}{6578}\times b-\frac{90}{6578}\times d)^2} \tag{3}$$

（9）の右図より $\triangle AOB$ に余弦定理を用いて

$$\cos\theta=\frac{6578^2+6578^2-\left(\sqrt{(\frac{180}{6578}\times a-\frac{180}{6578}\times c)^2+(\frac{90}{6578}\times b-\frac{90}{6578}\times d)^2}\right)^2}{2\times 6578^2}$$

$Defineshort(a,b,c,d)$

$$=40000\times\cos^{-1}\left[\frac{6578^2+6578^2-\left(\sqrt{(\frac{180}{6578}\times a-\frac{180}{6578}\times c)^2+(\frac{90}{6578}\times b-\frac{90}{6578}\times d)^2}\right)^2}{2\times 6578^2}\right]\div 360^\circ$$

ただし、東経の場合は正、西経の場合は負にすればよい。

以上により、東京と Losangels の距離は $short(-118,33,140,36)=10176.9(Km)$

> 先生からの一言
>
> 3 式が、どのような考えから導かれたのか?私には理解できません。もう少し経過を詳しく書いて欲しいですね。

木野孝泰 時間についての関数を考えた。

例　2004 年 4 月 4 日 4 時 44 分 44 秒に地球が破滅するとして、現在 2000 年 2 月 15 日 22 時 40 分 35 秒からあと何秒生きるとこができるのか? まず以下の事を決める。

破滅する年を a 、月を b 、日を c 、時を d 、分を e、秒を f

現在の年を g 、月を h 、日を i 、時を j 、分を k、秒を l とする。

まず文字を使って計算する。

秒は $(f+60)-l$ ....①

分は $\{(e+60-1)-k\}\times 60$ ....②

時は $\{(d+24-1)-j\}\times 60^2$ ....③

日は $\{c+\cdots\cdots\}$ 日は月によって 31 日、30 日 28 日たまに 29 日がある。これでは月ごとに計算できない。

そこで月と日を合わせて最大 365 日で秒を考え、また 1ヶ月は 30 日と定める。ただし

1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
+1	-2	+1	0	+1	0	+1	+1	0	+1	0	+1

表 1: 実際との差

ここで破滅する年の月の差を N 現在の月の差を O とすると、次の表ができる。これはひとまずおいておく。 ....④

	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
N	+1	-1	0	0	+1	+1	+2	+3	+3	+4	+4	+5
O	+1	-1	0	0	+1	+1	+2	+3	+3	+4	+4	+5

これで終わりではなく、うるう年の場合も考えると、うるう年の回数を M とすると M の数くらいは数えて欲しい。

$M\times 1\times 60^2\times 24$ 秒だけ 4 年に 1 回増える。.............⑤

④,⑤より

日は $\{365+(30\times b)+N-(30\times h)-O-1+M\}\times 60^2\times 24$ ....⑥

年は $(a-g-1)\times 60^2\times 24\times 365$ ....⑦

①②③⑥⑦より式を整理すると

$$
\begin{aligned}
&Definetime(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,\ell,M,N,O)\\
&\qquad=(f+60)-\ell+\{(e+60-1)-k\}\times 60+\{(d+24-1)-j\}\times 60\\
&\qquad+(365+30b+N-30h-O-1+M)\times 60^2\times 24+(a-g-1)\times 60^2\times 24\times 365
\end{aligned}
$$

という式が完成する。（全然美しくはない）

これで例の秒を求めると 131522649 秒となる。

一応これで破滅の正確な時間が判れば、今からあと何秒あがくことができるかが判る。参考としてこのレポートを書くのに 2030 秒かかったため、上の例の時間までこのレポートを約 64789 枚かくことができる。

先生からの一言

さてみなさん、彼の作った式は正しいでしょうか?考えましょう。

後日談

木野君は解説が終わったあと、自分でミスを修正に来ました。正しい式は

$$\begin{aligned}&Definetime(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,\ell,M,N,O)\\&\qquad=(f+60)-\ell+\{(e+60-1)-k\}\times 60+\{(d+24-1)-j\}\times 60\\&\qquad+(365+30b+N+c-30h-O-i-1+M)\times 60^2\times 24+(a-g-1)\times 60^2\times 24\times 365\end{aligned}$$

だそうです。

安達祐介 P（緯度 p °、経度 q °）、Q（緯度 r °、経度 s °）とおき、（緯度 p °、経度 s °）となる点を R とする。

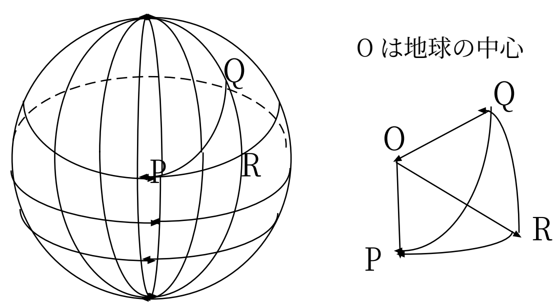


図 10:

$\angle POR=\alpha$,$\angle ROQ=\beta$,$\angle POQ=\theta$ とおく。

$PO=RO=QO=r$ （地球の半径）だから

$\triangle POR$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}PR^2&=OP^2+R0^2-2PO\times RO\times\cos\alpha\\&=r^2+r^2-2r^2\cos\alpha\\&=2r^2(1-\cos\alpha)\text{.................①}\end{aligned}$$

$\triangle ROQ$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}RQ^2&=RO^2+QO^2-2RO\times QO\times\cos\beta\\&=r^2+r^2-2r^2\cos\beta\\&=2r^2(1-\cos\beta)\text{..................②}\end{aligned}$$

$\triangle PQR$ が $\angle PRQ = 90^\circ$ の三角形であると仮定すると

$\triangle PQR$ において、三平方の定理より

$PQ = PR^2 + RQ^2$

①,② より

$$\begin{aligned} PQ^2 &= 2r^2(1-\cos\alpha) + 2r^2(1-\cos\beta) \\ &= 2r^2(2-\cos\alpha-\cos\beta)\text{..........③} \end{aligned}$$

$\triangle POQ$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{PO^2+QO^2-PQ^2}{2PO \times QO} \\ &= \frac{r^2+r^2-2r^2(2-\cos\alpha-\cos\beta)}{2r^2} \\ &= 1-(2-\cos\alpha-\cos\beta) \\ &= \cos\alpha+\cos\beta-1\text{.......④} \end{aligned}$$

これより $\theta = \cos^{-1}(\cos\alpha+\cos\beta-1)$ ....⑤

短い方の弧 PQ の長さを ℓ とおくと

$\ell = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$

⑤ を代入して $\ell = 2\pi r \frac{\cos^{-1}(\cos\alpha+\cos\beta-1)}{360}$.............⑥

さてここで α は p が北緯、r が南緯、または p が南緯、r が北緯の場合は $\alpha = p+r$

p ,r が共に南緯または北緯のときは $\alpha = |p-r|$ である。

また β は q が東経、s が西経、または q が西経、s が東経の場合は $\beta = 360-(q+s)$ （ただし $q+s \geqq 180$ のとき）$\beta = q+s$ （ただし $q+s < 180$ のとき）

q ,s が共に東経または西経のときは $\beta = |q-s|$ である。

実際にロス（北緯 33 °西経 118 °）と東京（北緯 36 °東経 140 °）を入力してみよう。

$\alpha = |33-36| = 3$

$\beta = 360-(118+140) = 102$

地球の半径 $r = 5678$ とすると、求める大圏コースの距離 ℓ は

$$\begin{aligned} \ell &= 2 \times 3.14 \times 6578 \times \frac{\cos^{-1}(\cos 3^\circ + \cos 102^\circ - 1)}{360} \\ &= 41309.84 \times \frac{\cos^{-1}(0.9986-0.2079-1)}{360} \\ &= 41309.84 \times \frac{77.91867}{360} \\ &= 8941.1 \end{aligned}$$

先生からの一言

$\angle PRQ = 90^\circ$ の三角形であるという仮定を認めたとして、三平方の定理は使えるのでしょうか。

後日談

このレポートを生徒に紹介しながら、解説をしたあと、安達君が私のところにやってきました。先生は「三平方の定理が使えるのでしょうか」と言っていますが、使えるはずです。と言うのです。よく聞いてみると、私の勘違いでした。私はてっきり彼は、「溝畑君」と同じ考えであると早合点していたのです。溝畑君は、2 つの円弧に対して三平方の定理を使用していますから、おかしいのですが、安達君は、弧ではなく、線分」PR ,RQ に対して三平方の定理をつかっています。両名ともに、緯度の差と経度の差に分けて考えているのですが、安達君は線分で考えています。従って安達君のミスは、$\angle PRQ = 90°$ の部分だけです。もちろんこの部分も、彼は $\angle PRQ = 90°$ だと仮定すると、として論を進めているのでそれほど問題はないとは思いますが。
結局、彼には緯度が低緯度の場合（赤道に近い場合）は、90 °でいいだろうけど、高緯度になると、90 °ではないよ。地球儀を見て観察をしてみましょう。と答えておきました。