指数表示と指数関数

授業で指数関数を学んだ。指数について考察してみよう。

Activity

a^x の a と x に色々な数値を代入して、その値を調べよう。
特に数値が求められないのは、どのようなものがあるかを中心に調べよう。また、こんな数はないだろうと思って計算させたのに、きちんと数値が存在するようなものもあれば発表しよう。いろいろ数値を求めて、最後に「値の存在するものと、しないものを分類し、その理由も自分なりにまとめよう。
なお小数の近似値を求めたいときには、DAIAMONDO, ENTER を押せばよい。

Activity

2 つの関数 $y = x^2$ と $y = a^x$ のグラフの交点の個数を調べよ。おそらく a の値によって変化すると思われるが、そのことを中心に考察せよ。

Activity

古代の遺跡から出土した木造建築物や木造の容器などがいつ頃作られたものであるかを、調べる方法に「炭素 14 年代測定法」というのがある。これは放射性炭素 C14 は宇宙線中性子と N14 との核反応で生成し、地域的にも経年的にもほぼ一定の濃度で大気中の炭酸ガスに含まれている。生物体の有機物中にもほとんど同じ濃度で含まれているが、生物が死ぬと生物体への新たな C14 の供給が途絶えるので、C14 の量は時間と共にその半減期にしたがって減少する。この減少量から年代を求めることができるのである。C14 の半減期は 5730 年である。現在の空気中の C14 の濃度が 1 %であり、遺跡から出土した古い建築物の柱の組成中の C14 の濃度が 0.77 %であったとき、この木造の柱は今から何年前に山から切り出された木材であると推定されるか。計算手順と、その結果をまとめよ。

西村浩伸 $y = x^2$ と $y = a^x$ のグラフの交点について

交点の数は 1 つのものと、2 つのものと、3 つのものがあると判った。

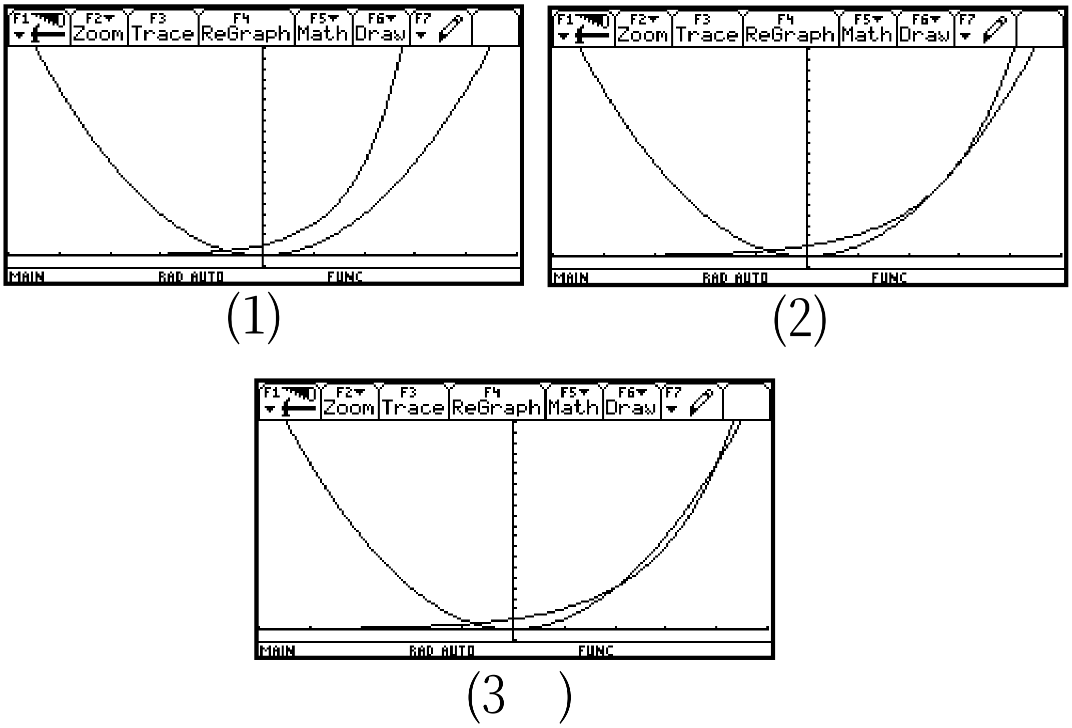

図 1: 西村

①のパターンになるには $a = 2$ では駄目だったが、$a = 3$ なら① の形になったので $a > 2.\cdots$ である。

③ のパターンは $a = 2$ のとき図の形になったが $a = 3$ では駄目だったので　$a < 2.\cdots$ である。

② のパターンは色々な数を a に代入した結果 $a = 2.08$ のときに $\boxed{\text{F5}}$ の INTERSECTION で調べると 2.08 のときに座標があったが、2.09 のときに NO SOLUTION だったので 2.08 と 2.09 の間に② の形になる a の値があると思われる。その値を仮に r とおくと① は $a > r$ のとき、② は $a = r$,③ は　$a < r$ のときと表せる。

廣田雅人

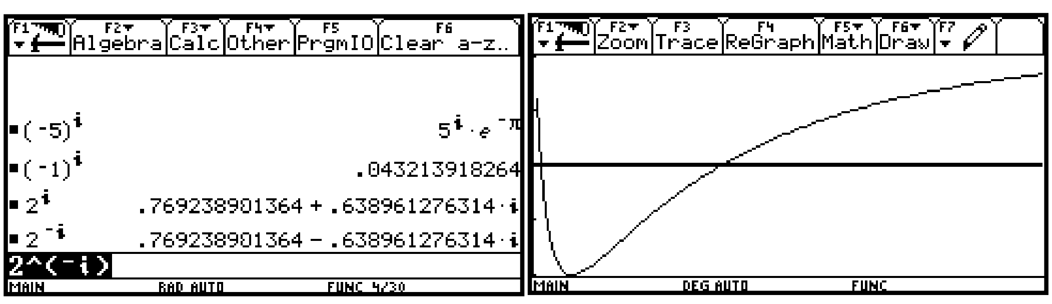

図 2: 廣田

$1^{\pm i} = 1$

$(-1)^i = e^{-\pi} \fallingdotseq 0.43213918264$

$(-5)^i = 5^i \times e^{-\pi}$

$x^i = a + bi$ として、x にいろんな数値を代入して計算させると、a も b も周期関数のように上がったり下がったりした。また、$x^{-i} = a - bi$ となる。

ということは $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi) = x^i \times x^{-i} = x^i \times \frac{1}{x^i} = 1$ となるので、a と b にも、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ と同じ関係がある。

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} \tag{1}$$

$$1 + \frac{1}{(\frac{b}{a})^2} = \frac{1}{b^2} \tag{2}$$

$$x^{2i}\text{の虚数部分} = 2ab \tag{3}$$

$$x^{2i}\text{の実数部分} = a^2 - b^2 = 2a^2 - 1 = 1 - 2b^2 \tag{4}$$

が成り立つようだ。これは $a^2 + b^2 = 1$ が原点を中心とする半径 1 の円を、つまり単位円を描くためだと思う。

式（1） は $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^\theta}$ に似ている。

式（2 ）は $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^\theta}$ に似ている。

式（3 ）は $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos 2\theta$ に似ている。

式（4 ）は $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ に似ている。

先生からの一言

実はすごいことを発見したのです。e という定数を数学 III で学習しますが、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ という等式が知られています。高校生にも分かり易いように書かれた書物「オイラーの贈り物」というのがあります。「海鳴社」吉田武著 3000 円（図書館にあるでしょう）

小林文浩 同じものだと錯覚していた $(\frac{1}{2})^{x^x}$ と $\{(\frac{1}{2})^x\}^x$ の比較

$y = (\frac{1}{2})^{x^x}$ のグラフは次のようになった。

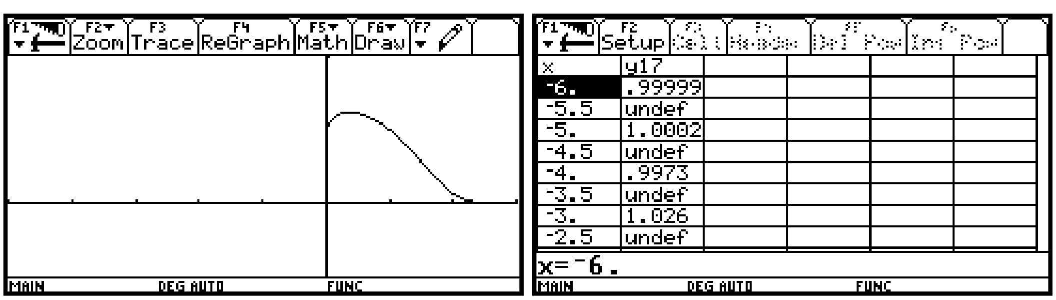

図 3: 小林

- グラフの $x < 0$ の部分を調べると値が存在した。

  $x = -4.78992$ のとき　エラー

  $x = -5$ のとき　1.00022

  $x = -5.05882$ のとき　エラー

  $x = -6$ のとき　0.999985 etc.....

- y 軸との交点が $(0,1)$ ではなく $(0,\frac{1}{2})$ であった。これは $(\frac{1}{2})^{0^0} = \frac{1}{2}^1 = \frac{1}{2}$ （先に $0^0 = 1$ を計算している）
- x 軸は漸近線になっていた。
- $y > 0$ だった。

$y = \{(\frac{1}{2}^x\}^x$ のグラフは次のようになった。

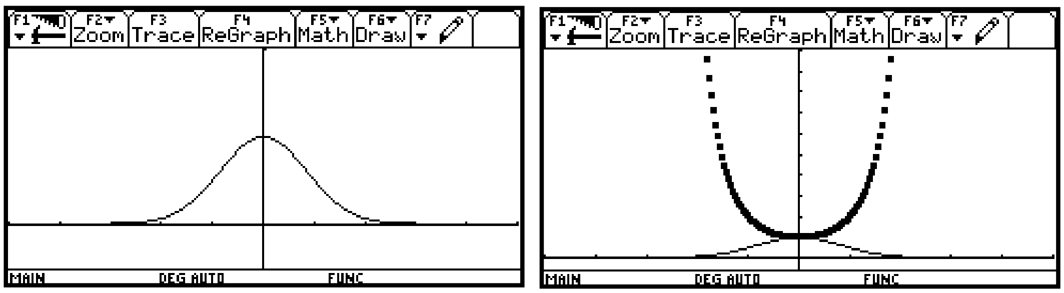

図 4:

- やはり $y > 0$ だった。
- x 軸は漸近線だった。
- y 軸との交点は $(0,1)$ だった。（先に $(\frac{1}{2})^0$ を計算している）

$y = (2^x)^x$ と $y = \{(\frac{1}{2}^x\}^x$ のグラフは y 軸対称になっていなかった。

$y = 2^{x^x}$ と $y = (\frac{1}{2}^{x^x}$ のグラフも y 軸対称になっていなかった。

> 先生からの一言
>
> 計算の順序についての観察がいいですね。

中谷祐哉 $y = 2^{\sin x}$ や $y = 2^{\cos x}$ を描かせると、最初は x 軸に平行な直線に見えた。しかし y の範囲を狭くしてみると曲線が見えた。これは x の変化に対する $\sin x$ の変化が小さいため $2^{\sin x}$ の変化も小さいからである。

次に $y = 2^{\sin x}$ のグラフは $y = \sin x$ の変化の仕方に似ている。しかし $y = 2^x$ と $y = x$ のグラフはまったく似ていない。これは x の範囲が $0° \leqq x \leqq 360°$ でも $\sin x$ の範囲は $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるため、$2^{-1} \leqq 2^{\sin x} \leqq 2^1$ という範囲でしか変化せず、しかも $\sin x$ が周期的に変化するように、$2^{\sin x}$ も周期的に変化するためである。

> 先生からの一言
>
> 周期的変化の観察がいいですね。

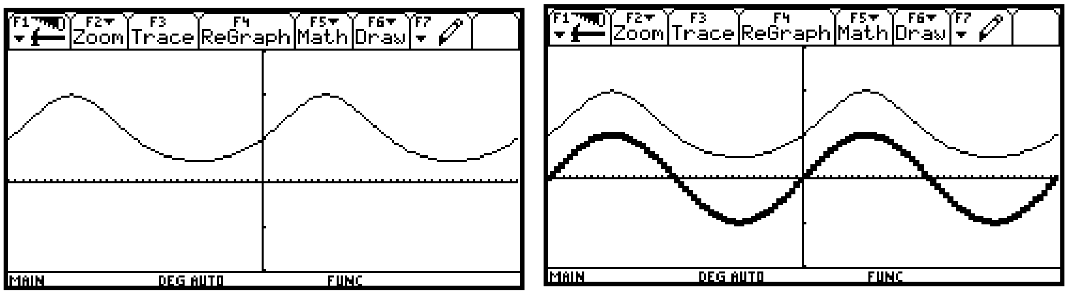

図 5:

水口智貴 $y = x^2$ と $y = a^x$ の交点について

$y = x^2$ と $y = 2^x$ は 3 点で交わった。だが $y = 3^x$ は 1 点しか交わらなかった。同様に $y = 1.6^x$ も 1 点でしか交わらないかと思えたが、WINDOW の ymax と ymin を変えるとやはり 3 点で交わっていた。

おそらく $2 < a < 3$ の間に交点を 1 回にするか、3 回にするかを分ける、$y = x^2$ と 1 回接する点があると思う。

$y = 2^x$ のとき $x = 2$ と $x = 4$ で交わったので、$x = 3$ ぐらいで接する点を探そうと、HOME で $SOLVE(3^2 = a^3, a)$ とすると、$a = 3^{\frac{2}{3}}$ とでた。しかしグラフを描かせるとわずかに交わってしまい交点が 3 個になってしまうことが判った。このことから $y = x^2$ と $y = a^x$ が接するときは、2 点で接することになると思う。よって交点は 1 個または 3 個にしかならないと思う。

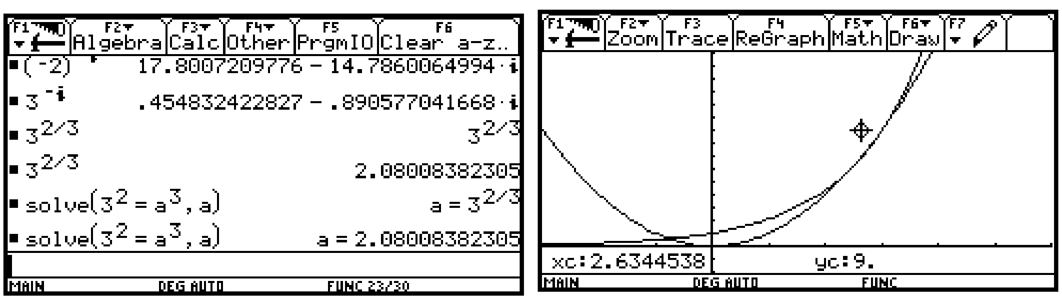

図 6:

先生からの一言
彼のミスの原因はどこにあるのでしょう?

池田祐之介 $y = x^2$ と $y = a^x$ のグラフの交点について

$a = 1$ のとき 2 個

$a = 2$ のとき 3 個

$a = 3$ のとき 1 個

$a = 4$ のとき 1 個

これ以上 a を大きくしても傾きが大きくなるから 1 回しか交わらない。

$a=-1$ のとき 0 個（$y=-1^x$ のこと）

$a=-2$ のとき 0 個

これ以上 a を小さくしても 1 回も交わらない。

$y=(-1)^x$ のとき予想では点がでる。その通りになった。よって負の数の x 乗は必ず点が出る。$y=(-\sqrt{2})^x$ でもそうなる。

$y=x^x$ のグラフはどうなるか?

表 1: 池田 report

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3
y	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{-\frac{1}{4}}}$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	4	27
	負	正	負	虚数	負	虚数	正	正	正	正	正	正	正

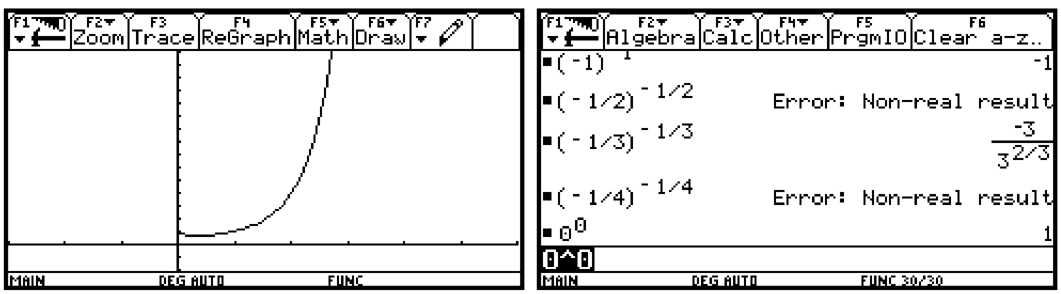

図 7:

なぜ x が負の整数のときに y の値があるのか?(実数になるのか?でしょう）

例えば $x=-2$ のとき $(-2)^{-2}=-\frac{1}{4}$ なので（注、彼はまちがっています）

$$(2^{-2})^{-2}=2^{-\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{(2)^{-1}}=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

最後の数は実数として存在する。

大きな原因が指数部分に i がでてこないことである。言い換えると、ルートの中が負にならない。

指数だけ考えると

$$(-3)^{-3}=-\frac{1}{27}=\frac{1}{(-3)^3},\quad (-4)^{-4}=\frac{1}{256}=\frac{1}{(-4)^4},$$

$$(-5)^{-5}=-\frac{1}{3125}=\frac{1}{(-5)^5},\quad (-6)^{-6}=\frac{1}{46656}=\frac{1}{(-6)^6}$$

おそらく一般に $(-a)^{-a}=\frac{1}{(-a)^a}$ ただし $a\neq 0$,a は整数

よって、ルートはでてこず虚数とならない。

先生からの一言

何となく言いたいことは判りますが、表現のミスや計算のミスが多いですよ。

久保田千尋 $y=2^{x^x}$ のグラフを描くと下の図のようになる。

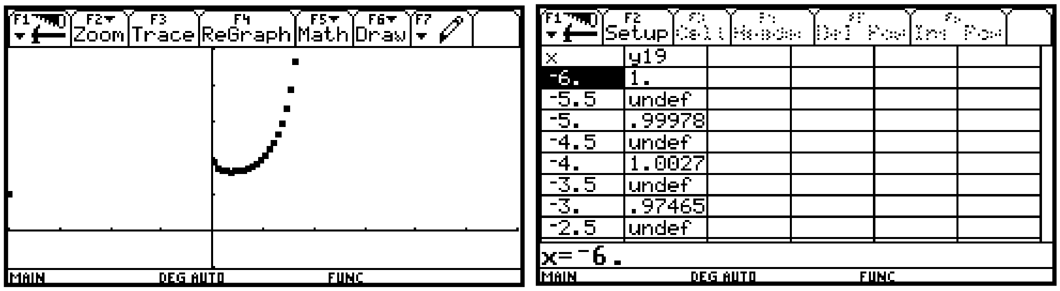

図 8:

TABLE は -6 以下は近似値で 1 が表示

表 2: TABLE

-5	0.99978	1	2
-4	1.0027	2	16
-3	0.97465	3	1.34E8
-2	1.1892	4	$\cdots$
-1	0.5	5	$\cdots$
0	2	6	$\cdots$

疑問

[1] なぜ x が負のとき、整数以外はないのか。

[2] $x=-1$ のとき $y=0.5$ になるのか。$y=2^{-1^{-1}}=(\frac{1}{2})^{-1}=2$ のはずだ。

疑問の [2] については、$2^{-1^{-1}}$ は指数同士の計算から先にするようだ。つまり $(-1)^{-1}=\frac{1}{-1}$ だから $2^{-1^{-1}}=2^{-1}=\frac{1}{2}=0.5$ なのだ。

疑問の [1] については、例えば $x=-\frac{1}{2}$ で考えると $(-\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{(-\frac{1}{2})^{-1}}=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ だから $2^{-\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}}}=2^{\sqrt{2}i}$ でこれはおそらく虚数だろう。だから値はない。

だから $y=2^{x^x}$ のグラフはあのようなグラフになるのだ。x が正になってからグラフが少し下がるのは、x の値が 1 より小さいので、累乗したらさらに小さくなるからだ。

池田龍之介、上田侑正、渡辺和明 $y=x^2$ と $y=a^x$ のグラフにおいて、a に適当な数値を代入してみると、交点の個数はたいてい 1 個か 3 個となる。これは a の値を大きくすると 1 個で、ある程度小さいと 3 個になる。このある程度がいくらぐらいなのかが気になったのでそのことについて調べてみることにした。

交点の個数が 2 個のときの a を求めるために、まずグラフを使ってみたがよく分からなかったので、HOME に戻って $SOLVE(x^2=a^x,x)$ の式を作った。a に適当な数を代入すると、$x=\cdots or \cdots or \cdots$ や $x=\cdots$ という答えがでてくる。　この x はグラフの交点の x 座標を表しているので、この個数が 2 つになる a の値を求めればよい。

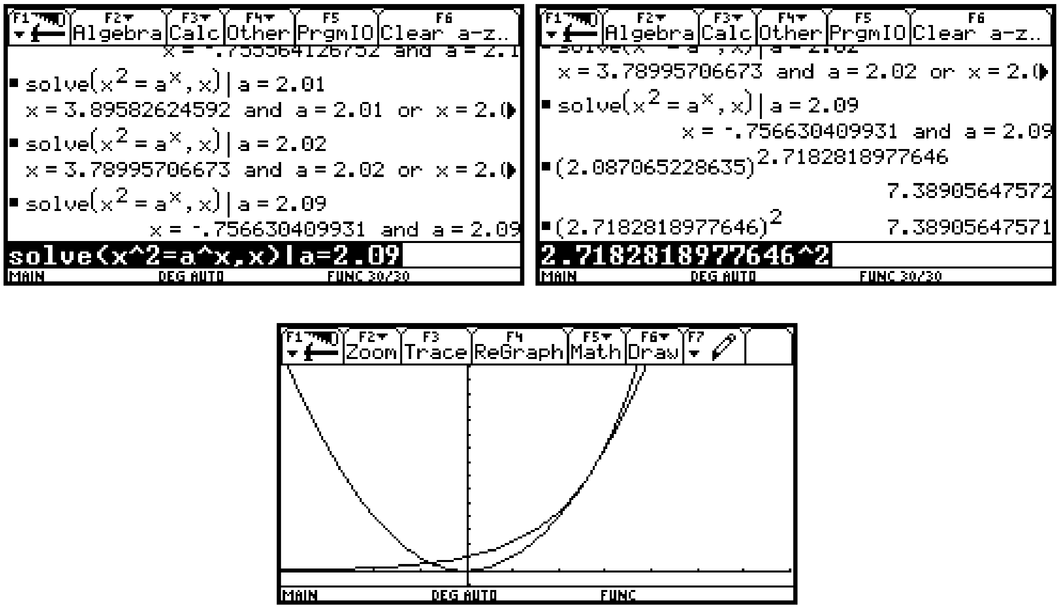

図 9:

この方法で x が 2 つになるのは $a = 2.087065228635$ のときで、そのときの x は $x = 2.7182818977646$ と $x = 0.756945106458$ である。

つまりグラフは x^2 と 2.087065228635^x のグラフなのでそれを描くと次のようになった。

$$y = 2.7182818977646^2 = 7.3890564757147$$

$$y = 2.087065228635^{2.7182818977646} = 7.389056475719$$

これら 2 つの y の値はほぼ等しいので、$y = x^2$ と $y = a^x$ のグラフの交点の数は $a \fallingdotseq 2.087065228635$ を境に、つまり $a > 2.087065228635$ のときは交点が 1 つ、$a < 2.087065228635$ のときは交点は 3 つであると考えてよい。このグラフ電卓は下 12 桁までしか計算することが出来なのでこれが限界であろう。

先生からの一言

3 人共同ですばらしい計算をしました。実は君たちが見つけた数 2.7182818977646 が e の値なのです。また、君たちの見つけた $a = 2.087065228635$ の値は、微分を使って計算すると、$e^{\frac{2}{e}}$ なのです。教科書で学ぶ e の定義は、これとはまったく異なりますが、こんな所にも e が隠れているということは、先生でも知らない人がたくさんいるでしょう。

寺坂直人 $y = 2^{x^x}$ のグラフを描き、TABLE で調べると

$A(0,2)$,$B(1,2)$,$C(2,16)$,$D(3,134217728)$,$E(-1,\frac{1}{2})$,$(-2,1.1892071151127)$,$F(-3,0.97465460912243)$ を通っている。

A と B の y 座標が同じなのは

$y_A = 2^{0^0} = 2^1 = 2$, $y_B = 2^{1^1} = 2^1 = 2$

$y_C = 2^{2^2} = 2^4 = 16$ $y_D = 2^{3^3} = 2^{27} = 134217728$(彼は間違えて $2^{3^3} = 2^9$ と書いています)

$y_E = 2^{-1^{-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$,$y_F = 2^{-2^{-2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

$x = -1.5$ は TABLE では　undef となっているがそれは $y = 2^{-1.5^{-1.5}} = 2^{-\frac{3}{2}^{-\frac{3}{2}}} = 2^{\sqrt{(-\frac{3}{2})^{-3}}}$ で $(-\frac{3}{2})^{-3}$ は負であるから、その平方根は虚数である。だらかグラフにはでていない。

先生からの一言

指数関数が底を正の数（1 を除く）に限定している理由がかなり判りましたね。

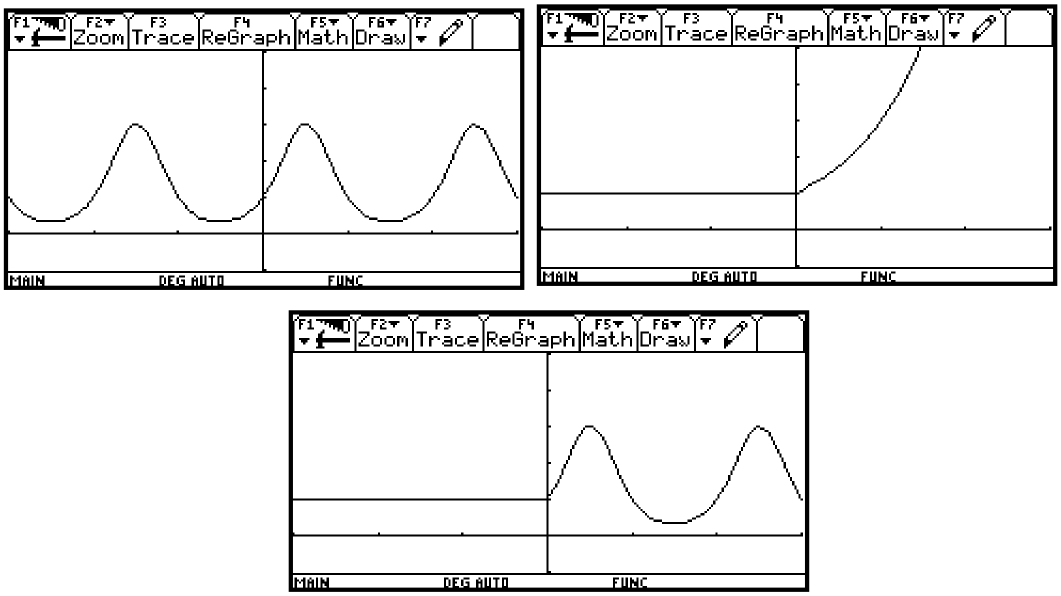

図 10:

田中義智

[**1**] $y = 3^{\sin(180x)}$ のグラフは次のようになった。色々なグラフを描かせてみると $x = 0$ のときだいたい $y = 1$ を通ることが判った。これは $y = a^0 = 1$ だからである。(平行移動はさせないとき) しかし、$y = 3^{\cos(180x)}$ では $y = 3^1$ となるので $y = 1$ を通らない。

[**2**] $y = \left(2 + \frac{x}{|x|}\right)^x$ のグラフは図のようになった。このグラフは $x < 0$ のとき $y = 1^x = 1$ で $x \geqq 0$ のとき $y = 3^x$ のグラフである。

[**3**] $\left(2 + \frac{x}{|x|}\right)^{\sin(180x)}$ のグラフは [1][2] を組み合わせたようなグラフになる。それは $x < 0$ のとき $y = 1^{\sin(180x)} = 1$ で指数が変化しても底が 1 なので $y = 1$
$x \geqq 0$ のときは $y = 3^{\sin(180x)}$ である。

先生からの一言

前回の MTT で、絶対値のついたグラフに興味を持ってくれたようですね。

吉村孝昌 3 つ目の ACTIVITY について

まず、$solve(x^{5730} = \frac{1}{2}, x)$ をすると $x = \frac{2^{\frac{5729}{5730}}}{2}$ または $x = \frac{-2^{\frac{5729}{5730}}}{2}$ がでた。これを指数関数の底にするので $\frac{2^{\frac{5729}{5730}}}{2}$ を使う。

$y = \left(\frac{2^{\frac{5729}{5730}}}{2}\right)^x$ の $x \geqq 0$, $y \leqq 1$ の部分が組成中の C14 の濃度を表す式となるはずである。（確かめ方が判らないのでこの式で正しいと仮定して話を進める。）

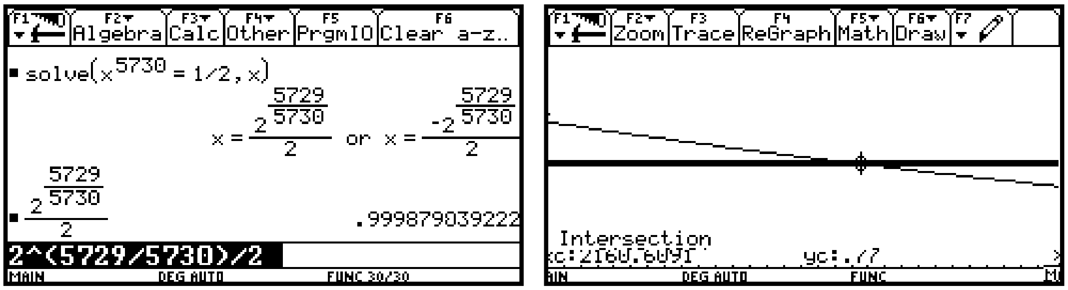

図 11:

$y = 0.77$ との交点を調べると $x = 2160.81$ のところで交わっていた。よっておよそ 2160 年前の木材と推定される。

（注 y は組成中のＣ１４の百分率濃度で x 経過時間を表す。

先生からの一言

この ACTIVITY をレポートしてくれたのは君だけでした。考古学のような世界にも指数関数は活躍しています。