1 はじめに

この授業は今後 M.T.T(Mathematics Thinking with Technology) と呼びます。

technology を使って「数学を考える」時間です。暗記やテクニックに走らないで，地道に数学を考えましょう。誰にでも新しい発見のチャンスがあります。だれにでも新しいアイデアを生み出す素地があります。

授業で学んだことを題材として，ときどき technology を使った数学をします。新しい操作を指導するときは，私が操作の仕方を教えますが，そこから先は自分で問題意識を持っていろいろなことを探求してもらうことが目標です。いくら面白いアイデアを思いついても「まだ習っていない数学」を使うことは困難ですし, もし習ったことであっても人間業で計算するのは困難なこともたくさんあります。

その点，ミニコンピューターがあれば，高校生でも（中学生でも）大學レベルの数学をすることが可能です。

例えば，1 年の 3 学期に 5 回ほど機械を使って勉強しました。

その最後の課題は，クレー射撃，花火です。私は「こんなものを作ってごらん」と言っただけですが，先日ドイツから参観に来られたときにみんなで見た「花火」はすばらしい作品でした。まず自分でどんな花火を作ろうかとスケッチし，物理の基本式を参考に，必要な数値を計算して，設計して作品を作るのですが, これは「暗記の数学」では不可能ですね。学習したことを元にして, 自分で創意工夫をし，新しいものを作ったり発見することが本当の生きた学問です。

2 パラメーター（媒介変数の探求）

電源を入れ，まず $\boxed{\text{mode}}$ を押して, 一番上の Graph のところで Prametric を選ぶ。

次に同じ画面で angle の所を Degree にする。$\boxed{\text{enter}}$ を押して最初の画面に戻る。

設定はこれで終了。

次に $\diamond$ $\boxed{\text{Y=}}$ を押すと，ペアーになった 99 個の関数を入力する画面がでる。

適当に x と y に式を入力する。入力は入力したい所にカーソルを持っていって $\boxed{\text{enter}}$ を押すと，一番下の欄にカーソルが動いて行くので，ここに入力する。入力が終われば $\boxed{\text{enter}}$ を押すと，上の欄に式が入って確定します。この機械ではパラメーターは t しか使えません。この段階で $\boxed{\text{F6}}$ を押すと，描くグラフのスタイルを指定することができます。いろいろ面白いスタイルがありますから，各自で試してみましょう。もしスタイルを指定しなければ，その時は自動的に点を線で結んでグラフを作ります。

式の入力が終われば, 次は $\diamond$ $\boxed{\text{Window}}$ を押して, ここで描きたいグラフの範囲を考えて, t , x, y 　の範囲を指定する。

このあと $\diamond$ $\boxed{\text{Graph}}$ を押すとグラフが描かれる。

ところで，初めて新しいグラフを描くとき, 人間はまず表を作って，実際にグラフが通る点を調べ，それを座標にとって行きますね。これと同じことをこの機械もグラフを描くときに行っています。その表を見たいときには $\diamond$ $\boxed{\text{Table}}$ ヲ押せば見れます。

一応これで操作の説明は終わりです。

ただし探求の途中で何か必要な操作があれば，それはどうすればできるかは，その都度質問してください。

3　探求の仕方の例

A 君は $xt1 = \sqrt{1-t}$ 　　$yt1 = t+1$ と入力し,Window を $tmin = -5$，$tmax = 5$ ，$tstep = .1$，$xmin = -5$，$xmax = 10$，$xscl = 0.1$，$ymin = -15$，$ymax = 5$，$yscl = 0.1$ としてグラフを描かせると画面の一部分にグラフが描かれた。そこでなぜ画面全体にグラフがないのかを考えた。$\boxed{\text{F3}}$を押してグラフの上をたどると右端は $t = -5$ だった。だから windou の tmin を変えるともっと広い範囲でグラフが描かれるはずだと考えた。$tmin = -10$ にすると確かに予想通りになった。では tmax の値を大きくすれば両方に広がるはずだと考えて，$tmax = 10$ としてグラフを描かせた。しかし予想は外れた。tmax を大きくしたのに，左の端は変化しないではないか。$\boxed{\text{F3}}$の trace で左端を見ると $t = 1$ で左端に行き, 後はカーソルが消えてしまった。しかも y の値はあるのに x の値は消えた。ちょっと驚いたので ◇ (table)を眺めると t が 1 より大きくなると x は undef と書いてあった。（undef とは undefin のことで定義されないという意味）

それでなぜ定義されないのかを考えた。それは根号があって t が 1 より大きくなると根号の中が負の数になるからだとわかった。

試しに $xt2 = \sqrt{1+t}$ 　　$yt2 = t+1$ と入力して，グラフを描かせる前に，おそらくこれは t が -1 より小さい所ではグラフがないだろうと予想してから，実際に描かせてみた。予想は当たっていた。

次に根号の中に 2 乗を入れるとどうなるだろうと思って，$xt3 = \sqrt{t^2-5}$ 　　$yt3 = t+1$ と入力してみた。$t^2 - 5 < 0$ の不等式の解は $-\sqrt{5} < t < \sqrt{5}$ だから，今度はきっと途中にぐらふのないところがでてきてグラフが途切れるだろうと予想した。実際に描かせると，予想通り途切れたが，グラフの形は思いもせぬ形になった。なんだこの形は?

そこで今度は形を調べることにした。最初のグラフと 2 番目のグラフは，何となく放物線の一部のように見える。

授業でパラメータを消せば，x と y の式に直せることを習ったので，ノートで計算してみた。

$$y = t+1 \text{ から } t = y-1$$

$$\text{これを } x = \sqrt{1-t} \text{ に代入すると } x = \sqrt{2-y}$$

$$\text{なんだこれは。根号をとればよいかと思 っ て両辺を 2 乗すると } y = 2 - x^2$$

おお。上に凸の放物線だ。2 番目のも変形すると確かに下に凸の放物線になった。

これで最初と 2 番目については，放物線の一部だとわかった。

それで 3 番目も変形してみた。すると $x^2 = (y-1)^2 - 5$ となった。移項すると $x^2 - (y-1)2 = -5$ だ。

円のような式になったが，マイナスがあるので円ではない。これは何だろう。

試しに $xt4 = \sqrt{t^2+5}$ 　　$yt4 = t+1$ 　と入力してグラフを描かせた。なぜこうしたかというと, これなら，途中で途切れることがないので形がよくわかるだろと思ったからである。

予想どうり，グラフはと途切れなかった。形は放物線が横を向いたような形になった。試しに t を消してみると $x^2 - (y-1)^2 = 5$ だった。さっきと ± が違うだけだった。

ここでこの先どうしようかとしばらく考えて，ちょっと window の範囲を変えて見た。

なるべく全体を見るために $tmin = -100$，$tmax = 100$ ，$tstep = 1$，$xmin = -100$，$xmax = 100$，$xscl = 1$，$ymin = -100$，$ymax = 100$，$yscl = 1$ とした。グラフを描かせると，折れた直線が現れた。確かさっきの window の範囲ではカーブがかかっていたのに，今度は直線に見える。

画面の左半分は関係なさそうなので，またwindowを変えた。$tmin=-100$，$tmax=100$，$tstep=1$，$xmin=0$，$xmax=100$，$xscl=1$，$ymin=-100$，$ymax=100$，$yscl=1$

狙い通り左半分はなくなってさっきより右が大きく描かれた。しかしやはり直線に見える。

◇ $\boxed{\text{table}}$を見てみた。

たくさん数値が並んでいた。

しばらく考えた。もし直線が折れたグラフだったら，傾きがあるはずだと考えて，適当な2点をとってその傾きを計算した。（この計算は◇ $\boxed{\text{home}}$で行った。

別の2点をとって傾きを計算すると, 先ほどの傾きと違った。

これで，このグラフは直線が折れたものではないということが確定した。

いったいなんという形なのだろう。

4　終わり

上に述べたのは　A君の探求です。これで私の要求する「探求」とはどのようなものであるかが少しは理解できたでしょう。

彼はこの探求の中で多くのことを考えていますね。彼がもし，この探求に2時間を使ったとしても，問題集を2時間するより遙かに高度な勉強ができているのです。しかもこの探求は夢中になればなるほど「遊び」の域に達します。つまり「食事を忘れて遊ぶ」ことになるのです。強制的な学習ではこうはいきません。

諸君，積極的にtechnologyで遊びましょう。

Activity1　好きな式を代入してパラメータで遊び，君なりの探求をレポートしなさい。式は何でも結構です。操作上のの質問はいつでもどうぞ。私にわかる範囲で教えます。提出は4月28日(土曜日）です。多くのレポートをお待ちしてます。

5　レポート紹介

小島良太 ボーと関数電卓をみていたら,「9」のボタンの上に x^{-1} と黄色で書いてあった。だから x^{-1} について調べてみようと思う。

まず，$xt = t^{-1}$，$yt = t$ と入れてみた。グラフはほとんど x 軸と y 軸にひっついているようになっていてよくわからなかった。とりあえず Table をみたら，xt の値がすべて小数だったので Window で $xmin = -1$ $xmax = 1$ にしてみた。

今度は第 1 象限と第 3 象限にグラフができたが，いまいちわからなかったので，今度は $xmin = -2$,　$xmax = 2$ にしてみた。はっきりとグラフがでてきた。これは確か反比例のグラフだ。なんでだろうと思って Table をもう一度開いてみた。$t = 0$ のとき xt が undef となっていた。undef というのはよくわからんが計算できないときにでてくるらしい。

「計算ができない」というので思い出すのは分数で分母が 0 のときくらい。ここでちょっといい案がでた。

化学で原子などの質量は軽すぎるので必ず $a \times 10^{-b}$ となり，

計算の途中で $\dfrac{1}{a \times 10^{-b}} = \dfrac{1}{a} \times 10^{b}$ とする。

これを利用して $t^{-1} = \frac{1}{t}$ つまり $xt = \frac{1}{t}$ とおいてみて，実際に Table にでてくる数値を代入してみるとちゃんと成り立った。しかも $\frac{1}{t}$ を見る限り，反比例の式になっている。あっというまに疑問解決。

これだけじゃつまんないので，今度は $xt = t^{-2}$ $yt = t$ にしてみた。

そしたら今度はグラフが第 1，第 4 象限にできた。グラフの形自体は $xt = t^{-1}$,$yt = t$ とあまり変化がないので $t^{-2} = \frac{1}{t^2}$ つまり $xt2 = \frac{1}{t^2}$ となるはずだ。

たしかに $t = -2$ や $t = 3$ などでは成立したが，唯一 $t = 0$ の時だけ解が ∞ になって成立しなかった。$xt1 = t^{-1}$ のときは，$t = 0$ のとき undef とでて成立したのに。

気になったので，$xt = t^{-3}$,$xt = t^{-4}$ (y はつねに t にしておいた) とやってみると，不思議な法則に気がついた。

t^{-1} やの t^{-3}，t^{-5} ように奇数乗するとグラフは第 1，第 3 象限にあらわれ，$t = 0$ のとき「undef」になり，それに対して t^{-2} やの t^{-4}，t^{-6} のように偶数乗すると，グラフは第 1，第 4 象限にあらわれ，$t = 0$ のとき ∞ になる。

グラフの現れ方は何となくわかるけれども，$t = 0$ のときのことはなぜこうなるかはわからない。

t が例えマイナス 10 乗でも，$\dfrac{1}{t^{10}}$ に $t = 0$ を代入すれば，分母が 0 になって「undef」がでると思ったんだが。$\cdots\cdots$

それとも $t^{-a} = \dfrac{1}{t^{a}}$ に決定的な間違いがあるのだろうか ???

$\boxed{\text{解説}}$

まず彼の行ったことを一般的に述べてみると

$x = t^{-n}$ ，$y = t$ というパラメーター表示のグラフを考えたのです。

彼の言うように，$x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ でこれは定義です。この定義は指数法則 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ の拡張として定義されます。（詳細は講義します）

まずパラメーター t を消去すると,$t^n=\dfrac{1}{x}$ より，$y^n=\dfrac{1}{x}$ となります。

しかしこの式は n がどのような自然数であっても $t=0$ のときは undefinition です。理由は分母が 0 になることは認められていないからです。このことは，彼の考えが正しいことを示しています。

ではなぜ，彼がいうようなことが起こったのか?

実は, この機械は「極限値」という考えを理解しています。

試しに ◇ $\boxed{\text{Home}}$ で次のように入力してみましょう。

`1/x^n|x=0  and  n=1`

機械は undef とします。同じ画面で $n=2$ と入力すると ∞ です。次に $n=3$ と入力すると　undef で，$n=4$ なら ∞ です。確かに彼の言うように,n が奇数ならば undef で偶数ならば ∞ になります。

次に `1/x^n|x=0. and n=1` と入力しましょう。さっきとどこが違うか?0 の後に小数点を打っています。

これで同じように n の値を 1,2，3，4，5 と変えてみましょう。このときは常に undef になります。

つまりこの機械はゼロとゼロ. を区別しています。分数の分母においては，ゼロ. は正真正銘のゼロを代入していて，ゼロはゼロに非常に近い数値を代入しているのです。

横軸を t ，縦軸を x として $x=\dfrac{1}{t}$ のグラフを描くと，中学で学習した反比例のグラフになります。$t=0$ のところにグラフはありません。つまり分母が 0 になるところでは定義されていないのです。

では $x=\frac{1}{t^2}$ はどうでしょう。これは $x=(\dfrac{1}{t})^2$ と同じことですから，第 3 象限にあったグラフは第 2 象限にいきます。しかしグラフは $t=0$ ではやはり存在しません。

ところが，この 2 つのグラフをよく観察すると，$t=0$ に非常に近いところでは，グラフは 2 乗の場合は ∞ のところにありますね。しかし 1 乗の場合は，t が正で 0 に非常に近いときは ∞ ですが，負で 0 に非常に近いときは 1∞ です。これが極限値という考えで，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ は存在しない と考え,$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}=\infty$ と考えるのです。これで彼の疑問に説明がつきます。

ところで $y^n=\dfrac{1}{x}$ のグラフはなぜ彼のいうような形になるのでしょうか。

これは，垣内君の考えが有効です。この式は $x=\dfrac{1}{y^n}=(\dfrac{1}{y})^n$ と変形できます。ここで x と y を入れ替える（世界を入れ替える）と $y=(\dfrac{1}{x})^n$ となります。これは何となくグラフが描けそうですね。すると本当のグラフも描けてしますのです。これでどの象限にグラフができるかも彼の観察の通りであることがわかります。

渡辺紘輝 $|t-3|$ と $|t-7|$　の加減について

$$\begin{cases} xt = |t-3| + |t-7| \\ yt = |t-3| + |t-7| \end{cases}$$ というグラフを描かせた。

すると右上の方からグラフがでてきて，そのまま原点に行くかと思ったら，原点までいかず，$(4,4)$ の点で数秒とまり，また同じ道を帰っていった。

これは面白いと次に $\begin{cases} xt = |t-3| - |t-7| \\ yt = |t-3| - |t-7| \end{cases}$ というグラフを描かせた。

多分前のグラフが少し変かしただけだろうと思ったが，予想に反してグラフは最初に $(-4,-4)$ に止まっており，数秒すると右上にまっすぐ $(4,4)$ まで動きまた止まってしまった。

ならば，これもやってみようと $\begin{cases} xt = |t-3| + |t-7| \\ yt = |t-3| - |t-7| \end{cases}$ というグラフを描かせた。

すると今度は，右の方から x 軸に平行にやってきたかと思うと，$(4,-4)$ の点で垂直に上にあがり，$(4,4)$ まで来たら，また x 軸に平行に右の方へ行ってしまった。

この 3 つのグラフに共通する数に 4 というのがあるが，これは一体どこからきたのだろう。

多分 7 と 3 の差だろうと思い，今度は

$$\begin{cases} xt = |t-2| + |t-6| \\ yt = |t-2| + |t-6| \end{cases}$$

をしてみた。

やっと，予想通りとなり，グラフがまったく同じで，時間がすこしずれたものになった。

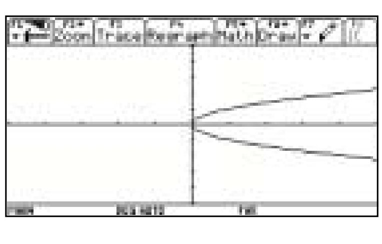
解説 彼の行った通りのことを，私もしてみました。彼は書いていませんがおそらく style は animate なのでしょう。途中で私も面白くなって, 思わず「笑ってしましました」絶対値というのは実に面白い働きをしています。しかもそれを，パラメータにほりこんだところが実に愉快です。

1 番目と 2 番目などは，x と y がまったく同じ式なのですから，明らかに t を消去すると $y=x$ の直線です。しかし，この直線のすべてを動かないし，その動きが非常に面白い。ぜひ諸君も自分でしてみてください。

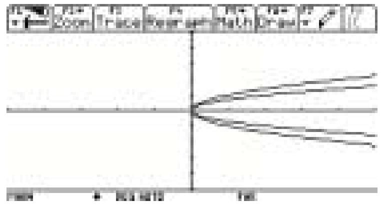
さて，このレポートで残念なことがあります。それはなぜそのような動きをするのかを探求していないところです。絶対値の場合分けの方法はすでに学習していますから，きちんと分析ができるはずです。

垣内大毅 何気なく $xt1 = t^2$，$yt1 = t$ と入力してみた。すると下の図のようになった。ちなみに window は $tmin = -5, tmax = 5, tste = 0.1, xmin = -5, xmax = 5, xscl = 1, ymin = -5, ymax = 5, yscl = 1$

しかしこの範囲に特に意味はない。



$xt1 = 2t^2$，$yt1 = t$ と入力すると，グラフは図のようになった。Wiondow は変わっていない。



$xt1 = 2t^2$ の係数の 2 は傾きか？とするとこれは 2 次関数か？

よくよく考えて，下図のように x 軸を縦に，y 軸を横にとって考えてみる。式は $x = t^2$ ，$y = t$ t を消すと $x = y^2$ これは 2 次関数である。少なくとも形からみればそうである。

考察：確かに普通は x 軸を横に，y 軸を縦にとるものであるが，別に x 軸を縦に，y 軸を横にとってもいいのだ。むしろその方が図や式を理解しやすいということもあるんだ。

たまにはこうして視点を変えてみると面白いものを発見できるかも知れない。

解説

特にありませんが，最後の考察は，最高ですね。まさに自由な発想が科学の発展に寄与してきたという一例でしょう。習ったことを正確にオウム替えしできることは，悪いことではありませんが，原理を理解し，それを様々に利用できる力こそ重要です。