方程式と接線

君たちが教科書や問題集で出会う方程式は必ず手計算で解を求めることができるようなものだけです。従って $x^4-4x^2+7x+1=0$ などという方程式は解くことができません。ではせめて $y=x^4-4x^2+7x+1$ グラフでも描いて見ようか。そう思ってもこの関数はグラフすら学校で習った方法で描くことができません。

なぜなら，$y'=4x^3-8x+7$ ですから，次に $y'=0$ を解こうと思ってもこの 3 次方程式は手計算では解けません。

では，グラフ電卓ならば解くでしょうか?各自電卓で計算してみましょう。

グラフ電卓では $x=-1.73461011337$ となります。しかしこの計算を彼（電卓）はどのようにして計算しているのでしょう。

そこで，接線の登場なのです。接線ってただの線で，微分を使えば求めることができますが，接線を引いて何が面白いのかと考えたことはありませんか?

$y=x^4-4x^2+7x+1$ 上の点 $(a,f(a))$ における接線は必ず求めることができますね。

$f'(a)=4a^3-8a+7$ ですから接線は $y-f(a)=(4a^3-8a+7)(x-a)$ となります。つまり方程式を解かなくても接線はでます。ではこの接線と x 軸の交点の座標は求めることができるでしょうか。

これも，常に OK です。なぜなら接線は，直線で，必ず 1 次式です。1 次方程式は必ず解けます。

先ほどの例では，交点の x 座標は $0-f(a)=(4a^3-8a+7)(x-a)$ より $x-a=\frac{-f(a)}{4a^3-8a+7}$ つまり $x=\frac{-f(a)}{4a^3-8a+7}+a$ になります。

さて, グラフで考えて見ましょう。

グラフ上の点を $(1,5)$ として，関数 $y=x^4-4x^2+7x+1$ 　のグラフと，$(1,5)$ における接線 $y=3x+2$ を描かせて見ましょう。

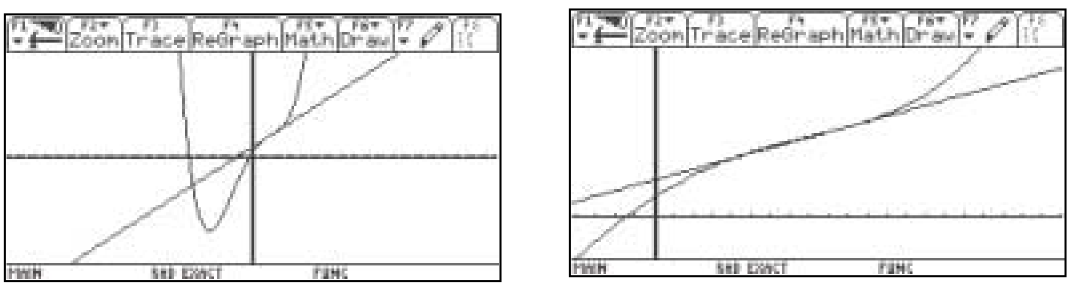

図 1:

接点の近くでは，元の関数のグラフと接線はほとんど区別がつかないという特徴が読みとれるでしょう。

ですから, もし接点が方程式 $f(x)=0$ の解の近くならば，$f(x)=0$ の代わりに接線が x 軸と交わる所を求めても，ほとんど変わりはないだろうということになります。

もし，接点が方程式 $f(x)=0$ の解からずいぶん離れたところならどうしよう。このときはきっと，うまくいかないでしょう。(これはうそかもしれませんよ）探求の価値あり

Activity

$f(x)=x^4-4x^2+7x+1$ のとき，$f(-2),f(-1),f(0),f(1)$ を調べよ。この結果から方程式 $f(x)=0$ の解はどこにあるか見当はつくでしょう。
解がありそうな整数値を x 座標とする関数 $y=f(x)$ 上の点での接線を求めよ。
求めた接線が x 軸と交わる点の x 座標を求めよ。
この x を元の関数に代入せよ。

Activity

$\cos x = x$ の解を求めよ。
$2^x = 5x$ の解を求めよ。

Activity

電卓で $\boxed{\text{SOLVE}}$ を用いて $\cos x = x$ の解を求めよ。
次に $\boxed{\text{HOME}}$ で $1 \to x$ と入力せよ。これは 1 を x に代入せよという命令です。
次に $\cos x \to x$ と入力せよ。
次に $\boxed{\diamond}\boxed{\text{enter}}$ を押す。これを繰り返すと，数値がどんどんでてきます。この数値はだんだんある値に収束しますから，適当なところで止めて, 最後の値と，$\boxed{\text{SOLVE}}$ を用いて求めた $\cos x = x$ の解とを比較せよ。
この一連の操作は何をしているのか,$y = \cos x$ のグラフと $y = x$ の 2 つのグラフを観ながら考察せよ。

Activity

今回の Activity を通して，考えたこと, 判ったことを自由に考察してまとめよ。自分で面白い方程式作ってそれを解いてみてもよろしい。