円周率 π の近似 (アルキメデスの方法)

アルキメデスは、円に内接する正 96 角形の周りの長さを計算して円周率 π の近似値を求めた。この方法をグラフ電卓で追試してみよう。

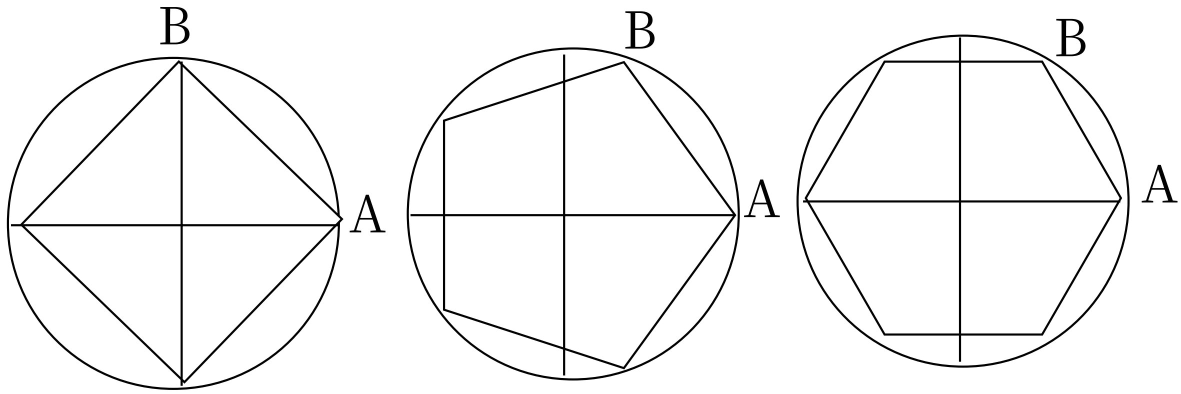


図 1: 正方形、正五角形、正六角形

原点が中心で、半径が 1 の円周上の点は,$(\cos\theta, \sin\theta)$ で表される。
従って、上の図の正方形の周りの長さは、距離の公式により

$$\sqrt{(\cos 90^\circ - 1)^2 + (\sin 90^\circ - 0)^2} \times 4$$

で求めることができる。
Home でこの式の値を計算してみよう。

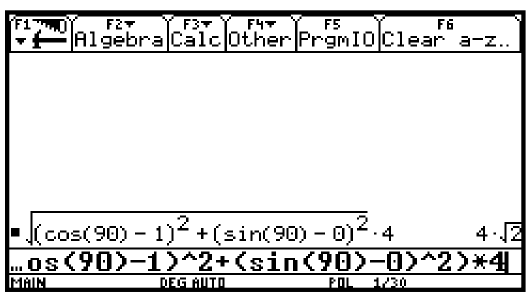


図 2:

Activity

正五角形、正六角形の場合について、その周りの長さを求めてみよ。
正 n 角形の周の長さを求める式を作ってみよう。

この式を入力し、n の値をどんどん大きくして、どのくらいの値にすれば、$\pi = 3.14$ 程度の値がでるかを試しましょう。

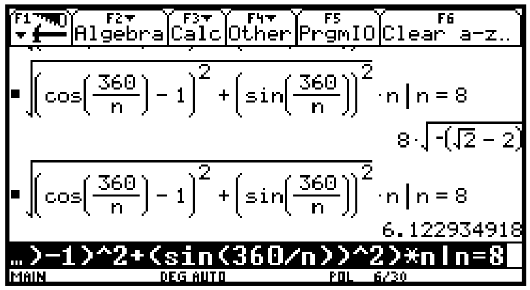


図 3:

次に、別の方法で π の近似値を調べましょう。

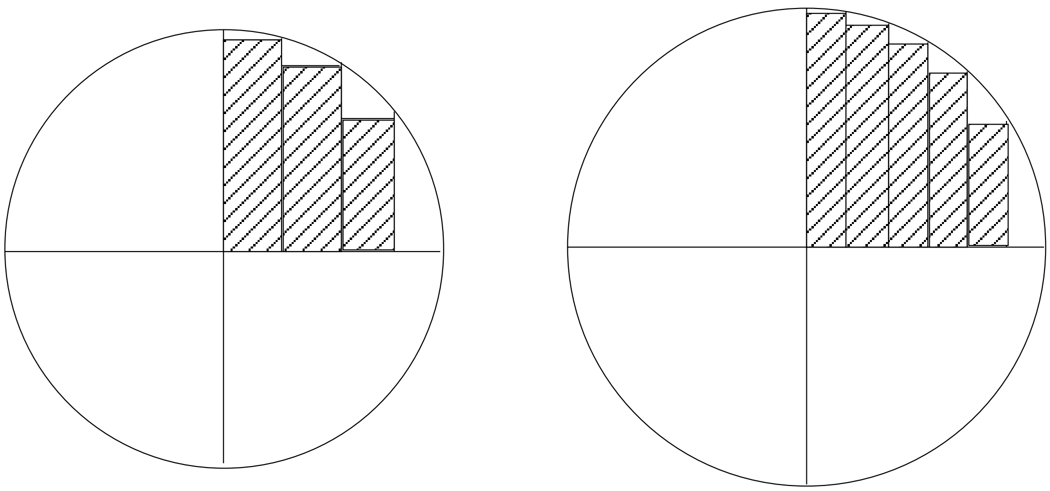


図 4:

原点中心で半径 1 の円の面積は π あります。この円を図のような長方形の集まりだとして、面積を計算しましょう。

まず $(0,0)$ と $(1,0)$ を 4 等分して、図のように長方形を 3 つ作る。

この長方形の面積の和を計算せよ。

Activity

$(0,0)$ と $(1,0)$ を 6 等分して、図のように長方形を 5 つ作った時。この 5 つの長方形の面積の和を計算せよ。
$(0,0)$ と $(1,0)$ を n 等分して、長方形を $(n-1)$ 個作った時、この $(n-1)$ 個の長方形の面積の和を計算する式を考えて、それを入力せよ。
n をどんどん大きくしていくと、π の近似値がでるが、n をどれくらいにすれ $\pi = 3.14$ 程度の精度になるか?

Activity

ここで行った方法は、微分（細かく分割する）のもっとも基本的な考えなのです。このアイデアを使って、これまでの知識では計算できなかった図形の、長さや面積や体積を計算してみましょう。図形は何でもよろしい。

瀬戸直樹 円の半径を 1 とする。この円に内接する正 n 角形の各頂点と円の中心を結ぶと、円の中には n 個の合同な三角形が n 個できる。この n 個の三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\frac{360°}{n}) \times n \tag{1}$$

になる。

n を大きくしていけばいくほど円の面積に近くなっていく。円の半径は 1 なので、π に近くなっていく。$n = 113$ のとき初めて $\pi = 3.14$ となった。

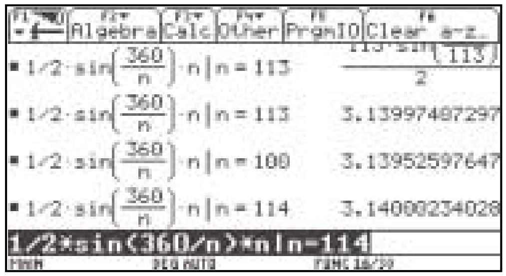
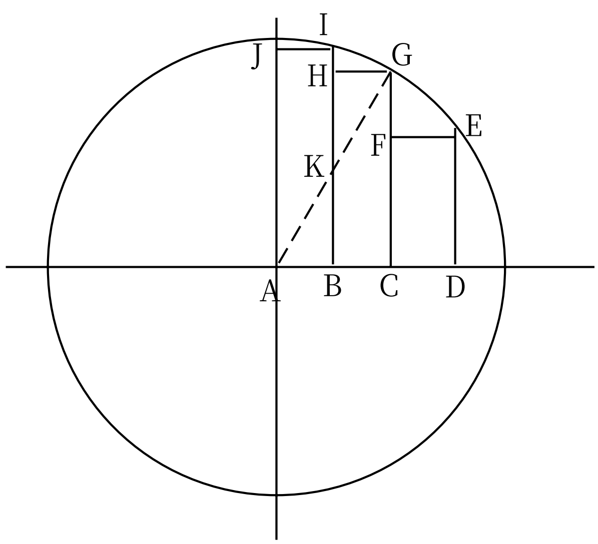


図 5: 瀬戸の計算

先生からの一言

(1) の式がよろしいね。昔の人は円を小さな扇形に分け、それらを交互に並べると、だいたい長方形になるという考えで円の面積を計算したそうです。

中谷祐哉 半径 1 の円の面積を求める。まず $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を n 等分し、$n - 1$ 個できる長方形の面積の和を 4 倍した一般式を作る。



まず長方形 $ABIJ$ の面積を求める。

$AB = \frac{1}{n}$ 、　BI の長さは三平方の定理より $\sqrt{1 - (\frac{1}{n})^2}$

よってこの面積は $\frac{1}{n}\sqrt{1 - (\frac{1}{n})^2}$

次に長方形 $BCGH$ の面積を求める。ところが CG の長さが分からない。

ここで $\triangle ABK$ と $\triangle GHK$ において $\angle BAK = \angle HGK$ 、$AK = GK$ ($\because AB : BC = 1 : 1$) , $AB = GH$ より $\triangle ABK \equiv \triangle GHK$ なので

長方形 $BCGH$ の面積と三角形 ACG の面積は等しいことが分かる。

$AC = \frac{2}{n}$, 三平方の定理より $CG = \sqrt{1-(\frac{2}{n})^2}$

よってこの面積は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times \sqrt{1-(\frac{2}{n})^2}$

同様にして長方形 $CDEF$ も $\frac{1}{3} \times \frac{3}{n} \times \sqrt{1-(\frac{3}{n})^2}$ となる。

よって求める式は

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\frac{k}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \times 4 = \frac{1}{n}4\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{-(k^2-n^2)}|\frac{1}{n}|$$

ただし $n \geqq 2$

後は n に数値を代入して 3.14 に近い n の値を探していけば何等分くらいで円の面積に近づくか分かる。

先生からの一言
実際にグラフ電卓で計算をして欲しかった。

渡辺直樹 まず彼は 4 等分して、3 つの長方形の和が

$$4 \times \frac{1}{4}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{4}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right\}$$

であることを導いて、そのあと中谷君と同様に一般式を求めていますが、その求め方は中谷君より簡単です。

それは、任意の長方形の高さを三平方の定理で、一気に $\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}$ としているのです。

それで彼の式は

$$\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

です。

$n = 1275$ のとき $\pi = 3.14$ となった。しかし実際は $\pi = 3.14159\cdots$ なので、もっと正確にしたければ 1275 の 3 倍、4 倍くらいの数を n に代入しなければいけないだろう。(僕は機械が計算するのに時間がかかりすぎるのでやってみなかった。)

先生からの一言
確かに 1275 の場合でもかなり時間がかかりますね。私は最新のコンピュータで計算してみましたが、君の予想より遙かに大きな $n = 20000$ でも 3.1414 までしか近づきませんでした。

$$\mathrm{N}[(4/1275)\ \mathrm{Sum}[\mathrm{Sqrt}[1-(k/1275)\quad 2],\{k,1,1275\}]]$$

3.14

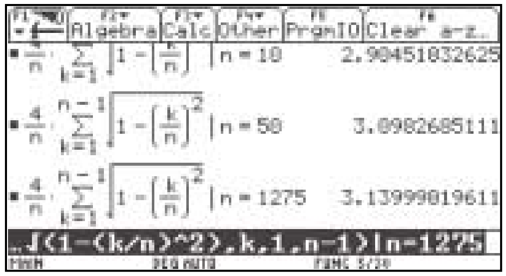


図 6: 渡辺直樹君の画面

$$\mathrm{N}[(4/4000)\ \ \mathrm{Sum}[\mathrm{Sqrt}[1-(k/4000)\quad 2],\{k,1,4000\}]]$$

3.14109

$$\mathrm{N}[(4/10000)\ \ \mathrm{Sum}[\mathrm{Sqrt}[1-(k/10000)\quad 2],\{k,1,10000\}]]$$

3.14139

$$\mathrm{N}[(4/20000)\ \ \mathrm{Sum}[\mathrm{Sqrt}[1-(k/20000)\quad 2],\{k,1,20000\}]]$$

3.14149

豊島了明 渡辺君と同じ方法でまず、円の中に長方形をたくさん作る方法で、円の面積が π だから

$$\pi = 4\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) \tag{2}$$

となったが、しかし まだかなりの隙間があるように思えた ので, 図の (1)(2) の部分にさらに三角形を継ぎ足した面積を考えた。

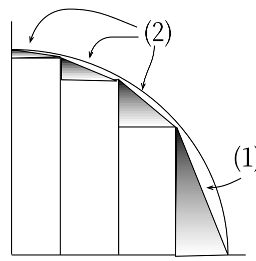


図 7: 三角形を継ぎ足す

(1) の三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \tag{3}$$

また (2) の部分の面積は

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \left\{ \sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \right\} \tag{4}$$

これらをすべて継ぎ足して

$$\pi = 4 \times \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \left\{ \sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \right\} \right\} \tag{5}$$

2 式と 5 式を比較すると

2 式では、$n = 1000$ を代入しても $\pi = 3.1396$ となり 3.14 以上にならない。

しかし 5 式では $n = 1000$ で、継ぎ足した部分の 0.0019 が加わるので、$\pi = 3.1415$ となる。

よって面積を円に近づければ近づくほど π の値が正確になることが分かった。

先生からの一言

単に長方形を集めるだけでは隙間が多いので、さらに三角形を継ぎ足すという発想がすばらしい。これも数学の歴史上有名な公式（シンプソンの公式や台形公式と呼ばれています) と同じ発想です。数学の公式などというのは「天才」が考えた公式のように思う人が多いのですが、そうではありません。豊島君のように、「ちょっと自分で補足してみよう」という素直な気持ちから生まれるものなのです。そのためには、覚える数学ではなく、自分で「こうなって欲しい」「こんなものがあればな」と思う気持ちが大切なのです。
少しだけ文句を言いますと、最後の 5 式は、もっと簡単になります。みなさん挑戦してみましょう。

廣田雅人 $y = \sin x$ のグラフの斜線部分の面積を求める。

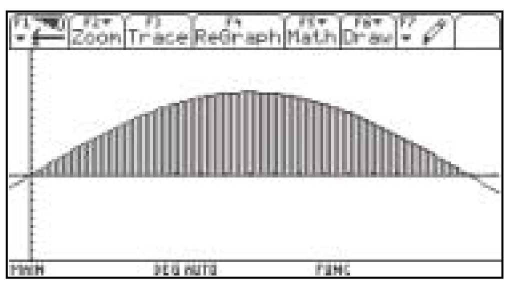
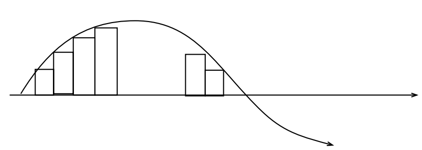


図 8: $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた面積

まず $0° \leqq x \leqq 180°$ の部分を n 等分する。すると $n-2$ 個の長方形ができる。



左から 1 個目の長方形の縦の長さは $\sin(\frac{180°}{n})$

左から 2 個目の長方形の縦の長さは $\sin(\frac{180°}{n} \times 2)$

左から 3 個目の長方形の縦の長さは $\sin(\frac{180°}{n} \times 3)$

左から k 個目の長方形の縦の長さは $\sin(\frac{180°}{n} \times k)$ となる。

またこれらの長方形の横の長さはいずれも $\frac{180°}{n}$

だから k 個目の長方形の面積は $\frac{180°}{n}\sin(\frac{180°}{n} \times k)$

従って求めたい面積を S とおくと

$$S = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{180°}{n} \sin(\frac{180°}{n} \times k)$$

ただし、この式の n に大きな値を入れれば、近似値が出るはずである。

$n = 100$ のとき $S = 114.52559$

$n = 1000$ のとき $S = 114.590899$

$n = 10000$ のとき $S = 114.591552$

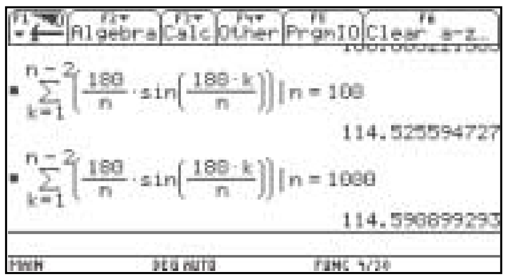


図 9: 廣田君の画面

先生からの一言

なかなか面白い図形の面積を考えましたね。しかしみんなに考えてもらいたいことが 1 つだけあります。彼が計算した $\frac{180°}{n}\sin(\frac{180°}{n} \times k)$ は長方形の面積なのでしょうか?　面積って何でしょう?