池田龍介君の発見したこと

グラフ電卓で計算させると 数列の和は次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{x} k = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2+x}{2} \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{x} k^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{x} k^3 = \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{x^4+2x^3+x^2}{4} \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{x} k^4 = \frac{6x^5+15x^4+10x^3-x}{30} \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{x} k^5 = \frac{2x^6+6x^5+5x^4-x^2}{12} \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{x} k^6 = \frac{6x^7+21x^6+2x^5-7x^3+x}{42} \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{x} k^7 = \frac{3x^8+12x^7+14x^6-7x^4+2x^2}{24} \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{x} k^8 = \frac{10x^9+45x^8+16x^7-4x^5+20x^3-3x}{90} \tag{8}$$

さて，上のそれぞれの式を x の整式と考えて微分してみよう。1 を微分すると $x+\frac{1}{2}$
2 を微分すると $x^2+x+\frac{1}{6}$
3 を微分すると $\frac{x(x+1)(2x+1)}{2}$
4 を微分すると $x^4+2x^3+x^2-\frac{1}{30}$
5 を微分すると $\frac{6x^5+15x^4+10x^3-x}{6}$
6 を微分すると $x^6+3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$
7 を微分すると $\frac{x(x+1)(6x^5+15x^4+6x^3-6x^2-x+1)}{6}$
8 を微分すると $x^8+4x^7+\frac{14x^6}{3}-\frac{7x^4}{3}+\frac{2x^2}{3}-\frac{1}{30}$
これらを眺めると次のような面白い関係が見えてくる。

$$\int 3\sum_{k=1}^{x} k^2 dx = \sum_{k=1}^{x} k^3 \qquad \int 5\sum_{k=1}^{x} k^4 dx = \sum_{k=1}^{x} k^5$$

$$\int 7\sum_{k=1}^{x} k^6 dx = \sum_{k=1}^{x} k^7$$

ところが

$$\int 2\sum_{k=1}^{x} k dx + \frac{x}{6} = \sum_{k=1}^{x} k^2 \qquad \int 4\sum_{k=1}^{x} k^3 dx - \frac{x}{30} = \sum_{k=1}^{x} k^4$$

$$\int 6\sum_{k=1}^{x} k^5 dx + \frac{x}{42} = \sum_{k=1}^{x} k^6 \qquad \int 8\sum_{k=1}^{x} k^7 dx - \frac{x}{30} = \sum_{k=1}^{x} k^8$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ と微積分が深い関係にありそうだという雰囲気が漂っているが，細かいところでうまく処理できない。

池田君の発見したことを元にした，講義禄

さて，$\sum$ と微積分を結びつけるアイデアとして代表的な考えは区分求積法である。特に

$$\log n + 1 > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{n} > \log(n+1) \tag{9}$$

という不等式が導かれる過程に注目してみよう。

これが不等式であるのは $\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}dx$ を 2 つの長方形ではさんでいることが原因である。

従って，もしあらゆる実数 x に対して

$$\int_{x-1}^{x} f(t)dt = x^k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{10}$$

を満たす関数 $f(x)$ が見つかれば，この両辺を $\sum_{x=1}^{n}$ することによって，$\sum_{x=1}^{n} x^k$ が積分で求められることになる。つまり

$$\int_{0}^{n} f(t)dt = \sum_{x=1}^{n} x^k \tag{11}$$

式 (10) は, $\int_{x-1}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} f(t)dt - \int_{a}^{x-1} f(t)dt = x^k$ と変形でき, (a は定数) (12)

式 (12) の両辺を x で微分すると

$$f(x) - f(x-1) = kx^{k-1} \tag{13}$$

式 (13) の両辺に $\sum_{x=1}^{n}$ をすると $f(n) - f(0) = k\sum_{x=1}^{n} x^{k-1}$ (14)

また式 (10) より $\int_{0}^{1} f(t)dt = 1$ (15)

ここで，具体的に式 (14), 式 (15) に $k = 3$ を代入してみよう。

$$f(n) = f(0) + 3\sum_{x=1}^{n} x^2 = f(0) + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + f(0) \tag{16}$$

$$\int_{0}^{1} f(t)dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{2}t(t+1)(2t+1)dt + \int_{0}^{1} f(0)dt = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + f(0)x\right]_0^1 = 1 + f(0)$$

これが 1 になるので $f(0) = 0$

以上によ $k = 3$ のとき 10 を満たすのは $f(t) = \frac{1}{2}t(t+1)(2t+1) = t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$

よ っ て式 (11) より $\sum_{x=1}^{n} x^3 = \int_{0}^{n} \left(t^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}t\right) dt = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

以上の方法を振り返ると式 (14) における $f(0)$ の値がもしも 0 ならば

$f(n) = k\sum_{x=1}^{n} x^{k-1}$ となり

式 (11) より $\sum_{x=1}^{n} x^k = \int_{0}^{n} f(t)dt = k\int_{0}^{n} \sum_{x=1}^{t} x^{k-1}dt$ となる。 (17)

式 (17) が池田君の発見した関係である。

したがって，このあとの展開としては，いかにして $f(0)$ の値を効率よく求めるかの方法になるだろう。

ところで，$f(0)$ は単なる定数であるから，式 (16) で $f(n)=3\sum_{x=1}^{n}x^2+c$ としておいて，直接 $k=3$ として，式 (11) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{n}x^3 &= \int_0^n\left(3\sum_{x=1}^{t}x^2+c\right)dt \\
&= \int_0^n\left(3\frac{t(t+1)(2t+1)}{6}+c\right)dt \\
&= \left[t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t+ct\right]_0^n \\
&= \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^{+}cn
\end{aligned}
$$

最後の段階で, 両辺に $n=1$ を代入すると，$\sum_{x=1}^{1}x^2=1$ なので，$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+c=1$ から $c=0$ と決定する。

この方が計算はすっきりする。

以下具体的にいくつか計算してみよう。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^4 &= \int_0^n\left(4\sum_{k=1}^{t}k^3+c\right)dt \\
&= \int_0^n\left(t^4+2t^3+t^2+c\right)dt \\
&= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3+cn
\end{aligned}
$$

ここで $n=1$ を代入すると

$1=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+c$ より $c=-\frac{1}{30}$

よ っ て$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^5 &= \int_0^n\left(5\sum_{k=1}^{t}k^4+c\right)dt \\
&= \int_0^n\left(t^5+\frac{5}{2}t^4+\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{6}t+c\right)dt \\
&= \frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2+cn
\end{aligned}
$$

ここで $n=1$ を代入すると

$1=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{12}+c$ より $c=0$

よ っ て$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$