

1 因数分解

- Home で F2 を選択し、2 : Factor(で色々な式の因数分解、色々な数の素因数分解ができる。

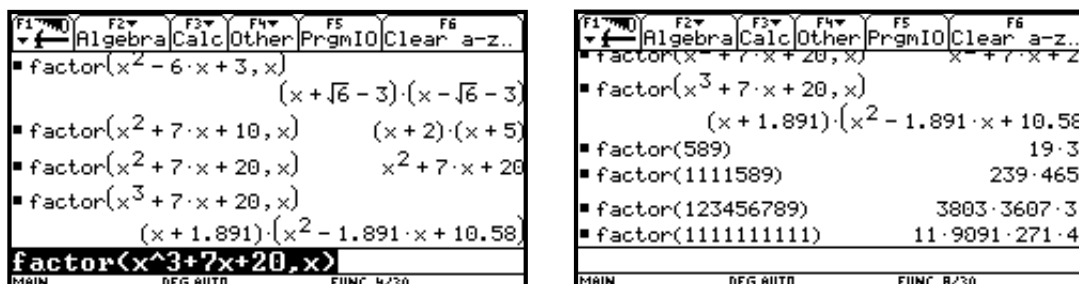


図 1:

Activity

色々な式を因数分解してみよう。何か面白いことが起これば、発表しよう。

この日は factor(f(x)) と factor(f(x),x) と cfactor(f(x),x) の違いだけを説明した。

factor(f(x)) は我々が普通にたすき掛けで因数分解するのと同じことで、factor(f(x),x) は係数に無理数が混じってもよいとして因数分解する、cfactor(f(x),x) は係数に虚数を使ってもよいとして因数分解しているのだと説明した。このあと各自で勝手に 2 次式を因数分解させて気がついたことを発表させた。

- $x^2 + Ax + B$ で B が A^2 より大きいときには cfactor(f(x),x) でないと因数分解しない。
- $x^2 \pm \text{素数}$ $x + \text{素数} \times \text{素数}$ のときは factor(f(x)) では因数分解できない。
- $x^2 + ax + b$ は判別式 $b^2 - 4ac$ がきれいな 2 乗のときはきれいな分解になる。
- $x^2 + 3x + 13$, $x^2 + 3x + 14$, $x^2 + 3x + 15$ の因数分解は規則性があるぞ。
- $x^2 + 123456789x + 123456789$ と $x^2 + 123456789x - 123456789$ の因数分解は同じ結果になる。しかしこれはおかしい。

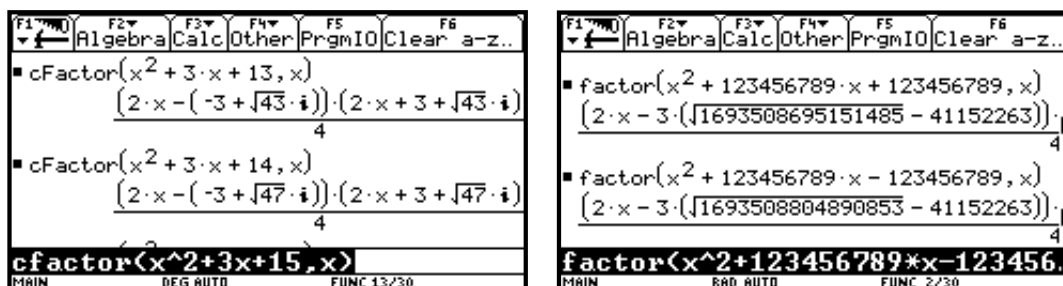


図 2:

- $x^2 + 557x - 995$ の因数分解には 557 という数字がでてくる。他の場合も同じだ。
- $x^2 + 222222x + 111111$ の因数分解の結果は面白いよ。

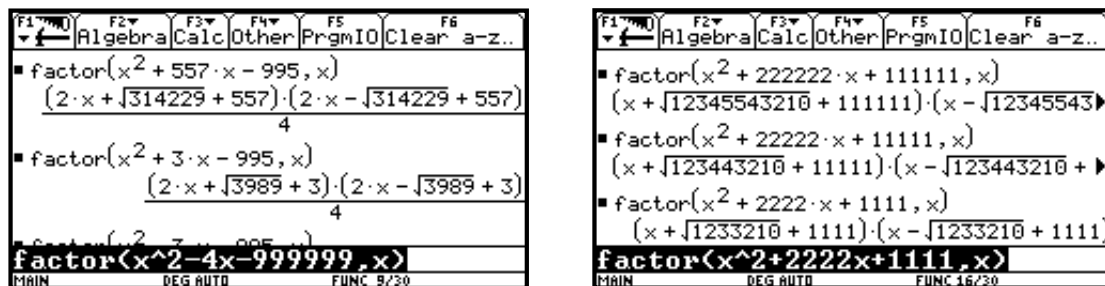


図 3:

この「Activity」が始まって、生徒は好きな 2 次式を因数分解し始めた。何か面白いことを見つけた生徒がでくると、その都度黒板に発見を書いていった。

生徒の活動には次の 3 通りが見られた。

- [1] 何か見つけるとすぐに発表する生徒。
- [2] 他人の発見したことを自分で追試する生徒。この生徒は反例を見つける場合が多い。
- [3] 自分が発見したことをさらに強固なものとするために、多くの数値を代入して検査し、正当化するための理屈を考える。

2 展開

- 「Home」で「F2」を選択し、「3: Expand(」で色々な式の展開ができる。

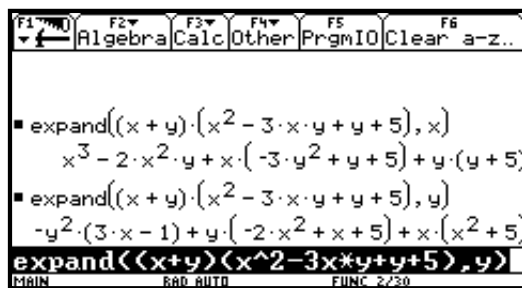


図 4:

Discussion

- 次の 2 つの違いを議論せよ。

$$\text{expand}((x+y)(x^2-3xy+y+5),x) \quad (1)$$

$$\text{expand}((x+y)(x^2-3xy+y+5),y) \quad (2)$$

- 色々な式を展開してみよう。何か面白いことが見つければ発表しよう。

$x^n - 1$ ただし $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ の因数分解を行い、その結果について、何か発見があればそれを発表しよう。

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad (3)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad (4)$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \quad (5)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (6)$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad (7)$$

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (8)$$

$$x^8 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \quad (9)$$

$$x^9 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) \quad (10)$$

$$x^{10} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \quad (11)$$

$$x^{11} - 1 = (x - 1)(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (12)$$

$$x^{12} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1) \quad (13)$$

$$x^{13} - 1 = (x - 1)(x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (14)$$

$$x^{14} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \quad (15)$$

$$x^{15} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) \quad (16)$$

$$x^{16} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) \quad (17)$$

$$x^{17} - 1 = (x - 1)(x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (18)$$

$$x^{18} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) \quad (19)$$

$$x^{19} - 1 = (x - 1)(x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (20)$$

$$x^{20} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) \quad (21)$$

$$x^{21} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^{12} - x^{11} + x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1) \quad (22)$$

$$x^{22} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \quad (23)$$

$$x^{23} - 1 = (x - 1)(x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad (24)$$

——生徒の発見した事柄——

[1] n が素数のときは、必ず括弧は 2 つである。

[2] 一番最初には必ず $(x - 1)$ がある。

[3] n が素数の場合、 $(x - 1)$ にかける片方の括弧の x の最初の乗数は $n - 1$ であり、後は $n - 2, n - 3$ と乗数が減る。最後に定数項 1 が必ずくる。

- [4] n に、素数の倍数を代入すると、その素数を代入したときの因数分解の答えの $(x-1)$ にかかるもう片方の因数が必ずくる。
- [5] n が偶数のときには、 $(x-1)(x+1)$ が必ずある。
- [6] n が 3 の倍数のときは、 $(x-1)(x^2+x+1)$ が必ずある。
- [7] n が素数のときは、 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$ に必ずなる。
- [8] n が 4 の倍数のときは、 $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ が必ずある。
- [9] n が 5 の倍数のときは、 $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ が必ずある。
- [10] n が 6 の倍数のときは、 (x^2-x+1) も必ずある。
- [11] $x^n - 1 = (x-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)$ である。
- [12] $x^{3^n} - 1 = (x-1)(x^2+x+1)\cdots(x^a+x^b+1^c)$ とすると、
 $x^{3^{n+1}} - 1 = (x-1)(x^2+x+1)\cdots(x^a+x^b+1^c)(x^{3a}+x^{3b}+1^{3c})$ になる。
- [13] 括弧内に $-$ の符号があるときは、 $-, +, -, +$ という順番になる。
- [14] $x^{4n+2} - 1$ のときは、符号を気にしなければ、同じ形のものが 2 組つつある。
- [15] $x^{2^n} - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)$ になる。
- [16] この機械では $x^{65535} - 1$ までしか因数分解できない。
- [17] $x^n - 1$ の因数分解で $(x-1)$ 以外のすべての項を展開すると、すべて $(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$ になったので、必ず $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$ になる。
- [18] $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$ を証明する。
 右辺 $= x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1$
 $= x^n - 1 =$ 左辺
- [19] $x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1)$
- [20] $x^{3n} - 1 = (x^n - 1)(x^{2n} + x^n + 1)$
- [21] n が何かの倍数のとき、同じ括弧がある。
- [22] n が素数のとき、 $(x-1)$ の後ろの括弧の中がきれい。
- [23] $x^{6 \cdot 3^{n-1}} - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\cdots(x^{6 \cdot 3^{n-2}}+x^3 \cdot 3^{n-2}+1)(x^{6 \cdot 3^{n-2}}-x^3 \cdot 3^{n-2}+1)$
- [24] p が素数のとき、 $x^{2^p} - 1 = (x-1)(x+1)\cdots(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1)(x^{p-1}-x^{p-2}+\cdots+1)$
- [25] n の約数を m とするとき、 $x^n - 1$ の因数分解の因数には、 $x^m - 1$ の因数分解と同じものが含まれている。
- [26] $x^n - 1$ の因数分解の各因数の最初の乗数の和は n に等しい。
- [27] $x^n - 1$ の因数分解の一番乗数の大きい因数を見ると、 n が 2、4、8、16 となるにつれて 1、2、4、8 となる。また n が 3、9、27 となるにつれて 2、6、18 となる。
- [28] $x^n - 1$ で $n = \boxed{3}$ から、 n を $\boxed{3}$ 倍するにつれ、今までの値に括弧が 1 つずつ増えていき、1 つ前の括弧から、各値が $\boxed{3}$ 乗したものが増えた。またこれは $(x-1)$ 以外すべての括弧の中に $\boxed{3}$ 項ずつ入っている。ちなみに $n = \boxed{2}$ からだと、 $\boxed{2}$ 倍していくにつれ、 $\boxed{2}$ 乗したものが増え、括弧の中に $\boxed{2}$ 項ずつ入っている。この法則は n が素数のときに成り立つ。
- [29] すべて $x-1$ で割りきれれる。
- [30] n が偶数のとき $(x-1)(x+1)$ で割りきれれる。
- [31] $n = p^m$ (p が素数) のときは規則的な形になる。その規則は
- (1) $(x-1)$ の後ろの括弧は m 個
 - (2) $(x-1)$ の後ろの括弧の中は p 個
 - (3) $(x-1)$ の後ろの括弧はその前の括弧のそれぞれの数を p 倍したものが入る

生徒の発見した事柄を数学的な関連で整理すると以下ようになる。

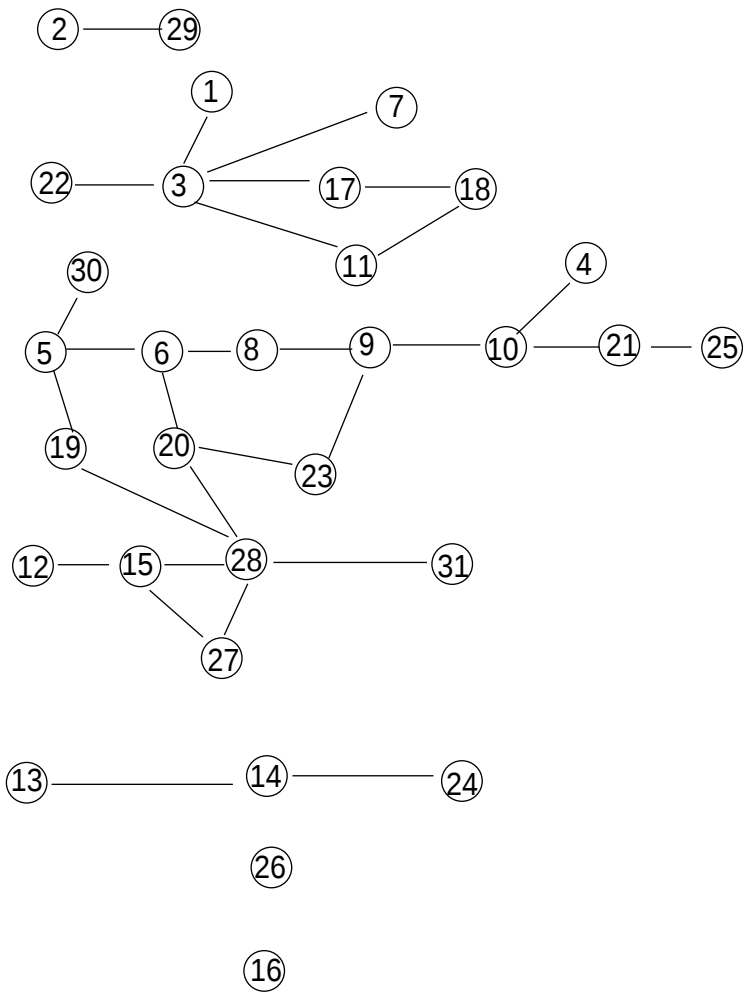


図 5:

グラフ電卓を使わずに以下の事柄が正しいか否かを検討せよ。

[5] について (ただし m は自然数)

$$x^{2m} - 1 = (x^2)^m - 1 = (x^2 - 1)(\dots\dots\dots) = (x - 1)(x + 1)(\dots\dots\dots)$$

[6][8][9][10] の理由を考えよ。数学的に示せ。

[4] について (ただし p は素数, m は自然数)

$$x^{pm} - 1 = (x^p)^m - 1 = (x^p - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \dots + x + 1)$$

[25] を数学的に示せ。

[19][20] を計算で納得できるか?

[12][23] の等式はただしいか? 正しいと思うなら証明せよ。