1 サイクロイド

Activity

半径 a の円の内側を、半径 b （ただし $a > b$ ）の円が滑らずに転がるとき、小さい円上の定点はどのような軌跡を描くか。その軌跡の媒介変数表示を求めよ。さらに a と b の値によって、描かれる図形はどのように変化するかを探求せよ。

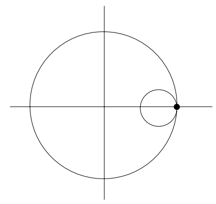


図 1: 内サイクロイド

Activity

半径 a の円の外側を、半径 b の円が滑らずに転がるとき、外側の円上の定点はどのような軌跡を描くか。その軌跡の媒介変数表示を求めよ。さらに a と b の値によって、描かれる図形はどのように変化するかを探求せよ。

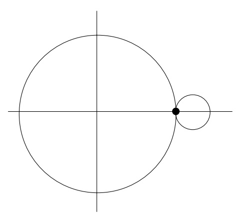


図 2: 外サイクロイド

Activity

極方程式のグラフをいろいろ描いてみて、面白いことがあれば探求せよ。

2 レポート紹介

寺阪直人 内サイクロイドの式を作るつもりであったが間違えてしまった。しかし面白い曲線ができた。

$$\begin{cases} x = (b-a)\cos\frac{a}{b}\theta - a\sin\{\theta - (\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b}\theta)\} \\ y = (b-a)\sin\frac{a}{b}\theta - a\cos\{\theta - (\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b}\theta)\} \end{cases}$$

$a=1, b=5$ が次のグラフの左側で、$a=3, b=5$ が右側である。外の円は $\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases}$ です。

図 3: 寺阪 No1

正しい内サイクロイドの式の式は $\begin{cases} x = (b-a)\cos\frac{a}{b}\theta - a\sin\{\theta - (\frac{\pi}{2} + \frac{a}{b}\theta)\} \\ y = (b-a)\sin\frac{a}{b}\theta - a\cos\{\theta - (\frac{\pi}{2} + \frac{a}{b}\theta)\} \end{cases}$ です。（注）彼は大円の半径を b 、小円のの半径を a としています。また角 θ は小さい円の回転角です。

図 4: 寺阪 No2

外サイクロイドの失敗は

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\frac{a}{b}\theta + a\sin\{\theta - (\frac{\pi}{2} + \frac{a}{b}\theta)\} \\ y = (a+b)\sin\frac{a}{b}\theta - a\cos\{\theta - (\frac{\pi}{2} + \frac{a}{b}\theta)\} \end{cases}$$

$a=1, b=5$ が次のグラフの左側で、$a=3, b=5$ が右側である。内の円は $\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases}$ です。

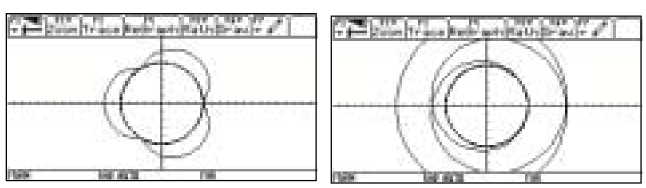


図 5: 寺阪 No3

外サイクロイドの正しい式は

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\frac{a}{b}\theta + a\sin\{\theta - (\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b}\theta)\} \\ y = (a+b)\sin\frac{a}{b}\theta - a\cos\{\theta - (\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b}\theta)\} \end{cases}$$

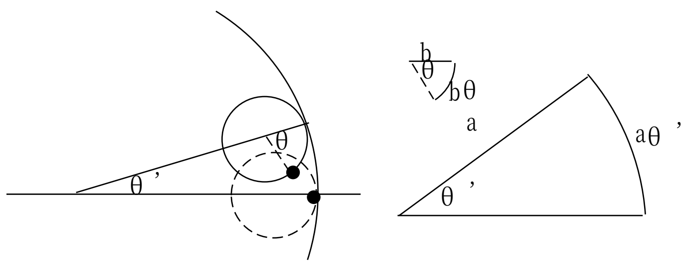
$a=1, b=5$ が次のグラフの左側で、$a=3, b=5$ が右側である。内の円は $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases}$ です。左側は花形になり、右側は櫻形のマークがきれいにできた。

図 6: 寺阪 No4

先生からの一言

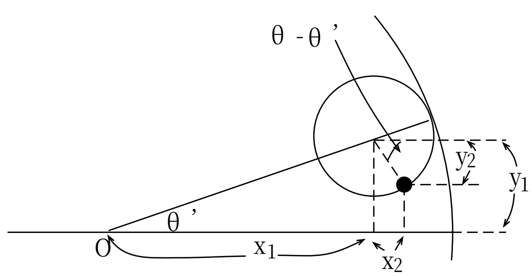
失敗した式も、面白いグラフになりますね。失敗の原因を考え、さらにこの失敗のグラフは、どのような点の軌跡なのかを考えるとさらに良いでしょう。それと君のレポートは、結果だけしか書いていませんが、考え方を書いていないと、レポートの価値は半減しますよ。

山本直人 まず半径 a 、半径 b の円をそれぞれ円 A、 円 B とする。図のように円 B が回った角を θ ラジアン、円 B と円 A の中心と始め円 B があったときの中心との角を θ' ラジアンとする。



まず θ と θ' の関係を考える。図のように 2 つの円弧の長さが同じなので

$$b\theta = a\theta' \tag{1}$$



ここで図より点●の x 座標は

$$x = x_1 + x_2$$
$$x_1 = (a-b)\cos\theta^{'}$$
$$x_2 = b\cos(\theta - \theta^{'})$$
$$x = (a-b)\cos\theta^{'} + b\cos(\theta - \theta^{'})$$

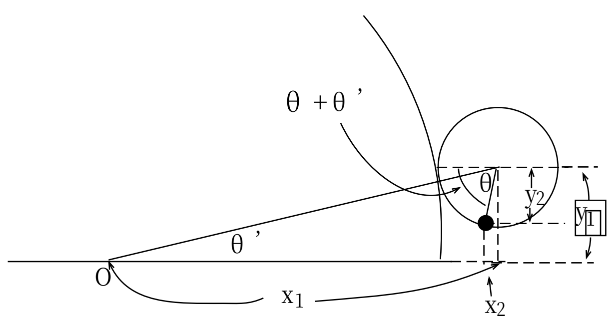
また、図より点●の y 座標は

$$y = y_1 - y_2$$
$$y_1 = (a-b)\sin\theta^{'}$$
$$y_2 = b\sin(\theta - \theta^{'})$$
$$y = (a-b)\sin\theta^{'} - b\sin(\theta - \theta^{'})$$

ここで式（1）より $\begin{cases} (a-b)\cos\theta^{'} + b\cos(\frac{a-b}{b}\theta^{'}) \\ (a-b)\sin\theta^{'} - b\sin(\frac{a-b}{b}\theta^{'}) \end{cases}$

$0 \leqq \theta^{'} \leqq 2\pi$ とすると、円 A の中を円 B がちょうど一周してきた軌跡となる。グラフは寺阪 No.2 と同じ。

円 A の外周を円 B が回るときも内側を回るときと同じく、式 (1) は成り立つ。



点●の x 座標は

$$x = x_1 - x_2$$
$$x_1 = (a+b)\cos\theta^{'}$$
$$x_2 = b\cos(\theta + \theta^{'})$$
$$x = (a+b)\cos\theta^{'} - b\cos(\theta + \theta^{'})$$

点●の y 座標は

$$y = y_1 - y_2$$
$$y_1 = (a+b)\sin\theta^{'}$$
$$y_2 = b\sin(\theta + \theta^{'})$$
$$y = (a+b)\sin\theta^{'} - b\sin(\theta + \theta^{'})$$

ここで $\theta+\theta^{'}=\frac{a}{b}\theta^{'}+\theta^{'}=\frac{a+b}{b}\theta^{'}$ より

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta^{'}-b\cos(\frac{a+b}{b}\theta^{'}) \\ y=(a+b)\sin\theta^{'}-b\sin(\frac{a+b}{b}\theta^{'}) \end{cases}$$

これも同じく、$0 \leqq \theta^{'} \leqq 2\pi$ の範囲で $\theta^{'}$ が 0 から大きくなっていくとき、円 B は円 A の外周をちょうど一周してきた軌跡となる。

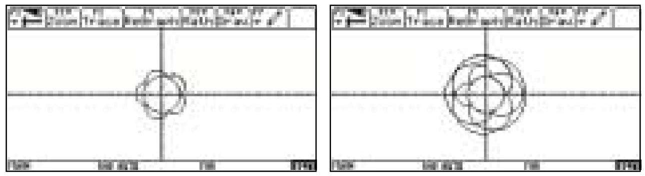


図 7: 山本の外サイクロイド

式（1）より $\theta^{'}=\frac{b}{a}\theta$ で $0 \leqq \frac{b}{a}\theta \leqq 2\pi$ 、かつ $a>b>0$ より $0 \leqq \theta \leqq \frac{a}{b}(2\pi)$

これは円 B が円 A の周上を 1 周してきたときの θ の動く範囲である。よって円 B は円 A の円周上を 1 周してきたとき、円 B は $\frac{a}{b}$ 回転している。

さらに $\frac{a}{b}$ が整数となるとき、円 B 上の定点は、円 A の円周上を回転しながら 1 周してきたとき元の場所に戻る。

$\frac{a}{b}$ がこれ以上約分できない $\frac{a^{'}}{b^{'}}$ になる $(a^{'},b^{'}$ は整数) とき、円 B 上の定点は、円 A の円周上を回転しながら $b^{'}$ 周してきたとき元の場所に戻る。

$\frac{a}{b}$ が無理数のとき、円 B 上の定点は、同じ場所に戻ってこない。

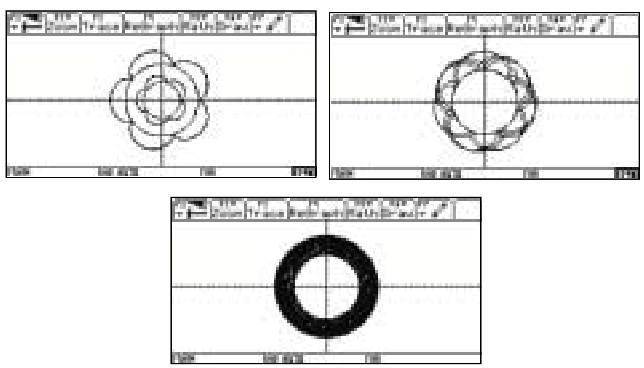


図 8: 山本のいろいろな外サイクロイド

先生からの一言

最後の考察が良い。君が主張している無理数の場合を実際に描かせて見ましたら、長い間グラフを書き続けて、とうとう黒いドーナツができてしまいました。

東　直弘 内サイクロイドについて

移動前について:半径 a の円と半径 b の円の接点を、点 A, 角 θ ラジアン移動後について: 円と円の接点を点 B 、半径 b の円の中心を $O^{'}$ 、点 A は点 $A^{'}(x,y)$ に移動するとする。

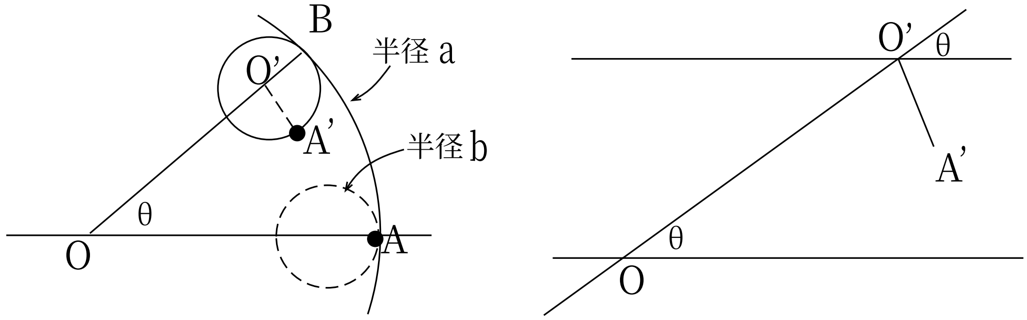


図 9: 東 No1

ベクトルで考えると

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A'} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OO'}\text{について}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \{(a-b)\cos\theta, (a-b)\sin\theta\} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{O'A'}\text{について}$$

$$\angle BO'A' = \theta' \quad \text{とおくと、} a\theta = b\theta'$$

$$\text{よって} \quad \theta' = \frac{a}{b}\theta$$

図 (9) のように補助線を入れ O' を原点のように考えると

$$\overrightarrow{O'A'} = \{b\cos(\frac{a}{b}\theta - \theta), b\sin(\frac{a}{b}\theta - \theta)\}$$

$$= \{b\cos(\frac{a-b}{b}\theta), b\sin(\frac{a-b}{b}\theta)\} \tag{4}$$

式 (2)(3)(4) より

$\overrightarrow{OA'}$ は $\begin{cases} x = (a-b)\cos\theta + b\cos(\frac{a-b}{b}\theta) \\ y = (a-b\sin\theta + b\sin(\frac{a-b}{b}\theta) \end{cases}$

外サイクロイドについて

内サイクロイドのときと同じ点の取り方をし、同じ考え方をするとやはり式（2）が成り立っている。

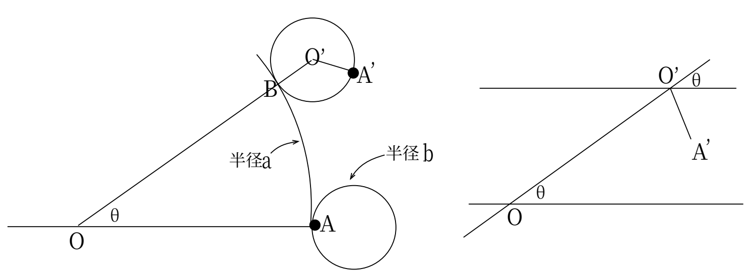


図 10: 東 No.2

$$\overrightarrow{OO'} \text{について}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \{(a+b)\cos\theta, (a+b)\sin\theta\} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{O'A'} \text{について}$$

$$\angle BO'A' = \theta' \quad \text{とおくと、} a = b\theta'$$

$$\text{よって} \quad \theta' = \frac{a}{b}\theta$$

図のように補助線を入れ O' を原点のように考えると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'A'} &= \{b\cos(\theta + \frac{a}{b}\theta - \pi), b\sin(\theta + \frac{a}{b}\theta - \pi)\} \\ &= \{-b\cos(\frac{a+b}{b}\theta), -b\sin(\frac{a+b}{b}\theta)\} \end{aligned} \tag{6}$$

式 (2)(5)(6) より

$$\overrightarrow{OA'} \text{は} \quad \begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos(\frac{a+b}{b}\theta) \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin(\frac{a+b}{b}\theta) \end{cases}$$

ところで、内、外サイクロイドの式はとても似ている。外サイクロイドの円の半径を b' とすると、なんと内サイクロイドの式に $b = -b$ を入れるとまったく同じ式になる。その理由を考えていきたいと思う。

(長さ）× (マイナス）などはもとの図では想像的につらいものがあるので、次の図のように半径 a の円を変形していく。

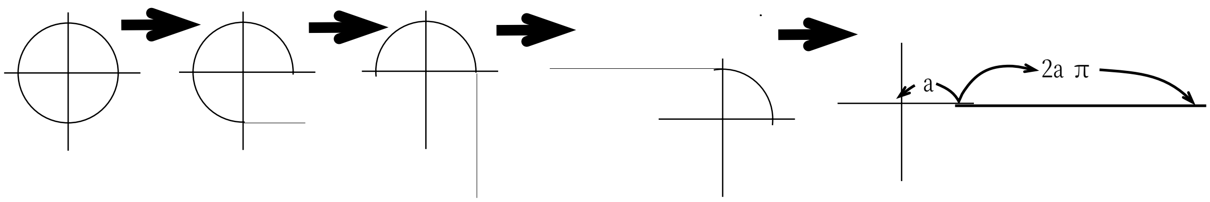


図 11: 円を変形する

つまり、半径 a の円の上を、半径 b の円が転がるサイクロイドとは、線分 $2a\pi$ 間を半径 b の円の定点 A' がサイクロイドを描き、線分 $2a\pi$ 間をもとのように、まるめて（矢印向きにまるめる）できる図形である。

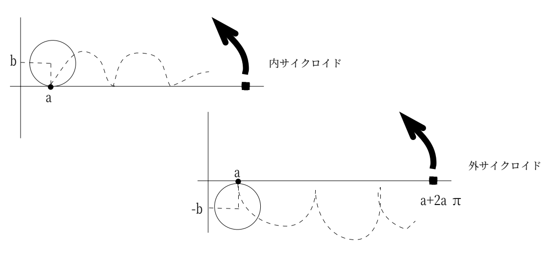


図 12: 円を変形する

このことから、内サイクロイドは上の図の左側で、外サイクロイドは右側の図で、$b = -b'$ の図形的意味が想像的に可能になる。このように考えると、内（外）サイクロイドで描かれる半円のようなもの

の個数も分かり易い。$2a\pi =$(bの円周)$\times$(個数)という式が成り立つので $2a\pi = 2b\pi \times n$ より $n = \frac{a}{b}$ となる。

まったく別の話として、線の上を円が転がるのではなく、円の上を線が転がるのを調べてみよう。

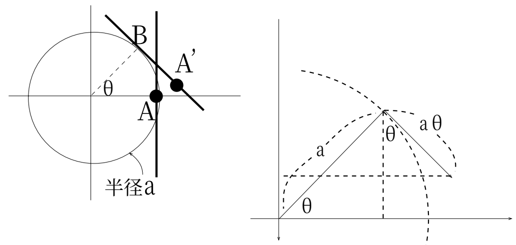


図 13: 円上を線が転がる

図のように弧 $AB = A^{'}B = a\theta$ なので、$\begin{cases} x^{'} = a\cos\theta + a\theta\sin\theta \\ y^{'} = a\sin\theta - a\theta\cos\theta \end{cases}$

つまり $\begin{cases} x^{'} = a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ y^{'} = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$

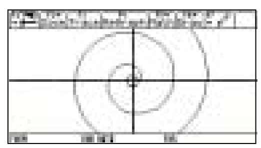
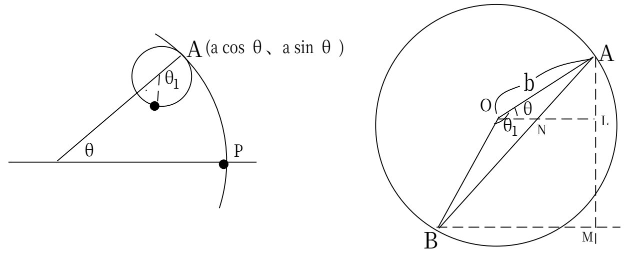


図 14: 東君の渦巻きグラフ

先生からの一言

君のレポートには 2 つのすばらしさがある。一つはサイクロイドと内サイクロイドと外サイクロイドの 3 つを統一的に考えるアイデアを考えたこと。もう一つは問題を作り替えて、円の上を直線が転がる問題を考えたことです。MTT の授業のねらいは、このように自分で発展的に考えることです。21 世紀は与えられたことや、教えられたことをただこなす人間ではなく、自分で新しいことを考える人間を必要としているのです。その意味ですばらしいレポートであったと思います。

松浦　亘 図のように角度や点の名前を設定する。円弧 AP の長さを ℓ とすると、$\ell = a\theta = b\theta_1$ より $\theta_1 = \frac{a}{b}\theta$ となる。



小円の拡大

図 15: 松浦君の図

小円に注目すると

$$\angle AOB = \theta_1 \text{より}$$

$$\angle OAB = \frac{\pi - \theta_1}{2} \text{であり、} \angle ANL = \frac{\pi - \theta_1}{2} + \theta \text{となる。}$$

$\angle ANL$ と $\angle ABM$ は同位角で等しく、線分 AB の長さは

$$b \times \cos(\frac{\pi - \theta_1}{2}) \times 2 \text{ で表されるので}$$

$$BM \text{ の長さは、} 2b\cos(\frac{\pi - \theta_1}{2})\cos(\frac{\pi - \theta_1}{2} + \theta)$$

$$AM \text{ の長さは、} 2b\cos(\frac{\pi - \theta_1}{2})\sin(\frac{\pi - \theta_1}{2} + \theta)$$

となるので、求める式は次のようになる。

$$\begin{cases} x = a\cos\theta - \{2b\cos(\frac{\pi - \frac{a}{b}\theta}{2})\}\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{(2b-a)\theta}{2b}) \\ y = a\sin\theta - \{2b\cos(\frac{\pi - \frac{a}{b}\theta}{2})\}\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{(2b-a)\theta}{2b}) \end{cases}$$

先生からの一言

君の考え方は、他の人とはまったく異なります。できあがった式もずいぶん様子が違います。しかしグラフを描かせてみると、他の式で描いたものと同じになります。考えに独創性があって非常に良い。

上田　侑正

$$r = \sin\theta \tag{7}$$

$$r = \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) \tag{8}$$

$$r = \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \tag{9}$$

(7)(8)(9) のグラフを描かせてみると (8)(9) はそれぞれ (7) を極を中心に $-\frac{\pi}{6}$,$-\frac{\pi}{4}$ 回転させたもののようである。

直交座標については (7) は

$$x^2 + y^2 = y \tag{10}$$

つまり $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ を表す。

原点を極とすると、直交座標と極座標は $x = r\cos\theta$,$y = r\sin\theta$,$r^2 = x^2 + y^2$ をみたしているので、$r = \sin(\theta + \alpha)$ (α は定数）から $r, \sin\theta, \cos\theta$ を消去すると

$$x^2 + y^2 = y\cos\alpha + x\sin\alpha \tag{11}$$

つまり

$$(x - \frac{\sin\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\cos\alpha}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

を表す。

ここで $y = f(x)$ のグラフを原点を中心に θ だけ回転させたグラフは

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = f(x\cos\theta + y\sin\theta)$$

であるので (10) の x の代わりに $x\cos(-\alpha) + y\sin(-\alpha)$, y の代わりに $-x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha)$ を代入してみると

$$(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$x^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha + x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$x^2 + y^2 = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

式 (11) とこの式は同じ式である。

よって $x^2 + y^2 = y$ のグラフを原点を中心に $-\alpha$回転させたものが $x^2 + y^2 = \cos\alpha + x\sin\alpha$

つまり $r = \sin\theta$のグラフを、極を中心に $-\alpha$回転させたものが $r = \sin(\theta + \alpha)$ である。

このことは $r = \sin 2\theta$　と $r = \sin(2\theta + 2\alpha)$

$r = \tan\theta$と $r = \tan(\theta + \alpha)$

などの間にも、おなじような関係があると思われる。

先生からの一言

極方程式のグラフを観察して、そこから「仮説」を縦、その仮説を、すでに知っている知識を活用して証明しているところはまさに MTT の神髄でしょう。直交座標では平行移動は簡単ですが、回転移動は複雑ですね。それに対して極座標では平行移動が複雑で、回転移動は簡単です。そのことを感じ取らせるレポートでした。

稲住　肇 極方程式 $r = \theta$ の黒い部分の面積を求めたい。

$\Delta\ r \to 0$ のとき、図の扇形もどきの面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$ である。よって積分の考えから

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\theta d\theta = \left[\frac{1}{2}r^2\frac{\theta^2}{2}\right]^2 \pi_0 = r^2\pi^2$$

よって面積は $r^2\pi^2$ である。

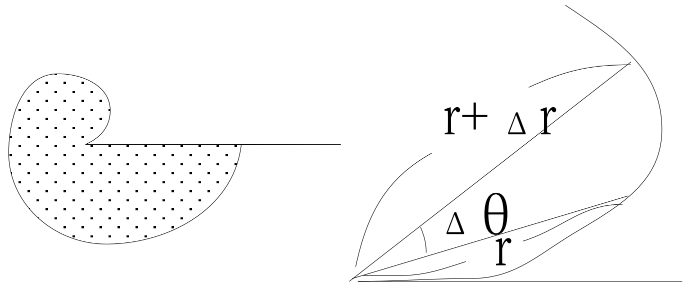


図 16: 求めたい面積

先生からの一言

稲住君らしく、かなり難しいことに挑戦しました。もしあの扇形もどきの面積が $\frac{1}{2}r^2\theta$ だとして、この積分計算は正しいでしょうか。また扇形もどきの面積が $\frac{1}{2}r^2\theta$ であることは証明できたのですか?予想をたてたらそれを証明してみるようにこころがけると数学がどんどん面白くなりますよ。

久保田　千尋 ベクトルの考えで、彼は内サイクロイドの式を以下のように求めている。もちろん彼は、経過も詳しく書いていますが、他の人のと同じかんがえですから説明は割愛します。ただし彼のパラメータ θ は、小円の回転角です。

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\frac{b\theta}{a} + b\cos\frac{(a-b)\theta}{a} \\ y = (a-b)\sin\frac{b\theta}{a} - b\sin\frac{(a-b)\theta}{a} \end{cases}$$

この後に、以下のような探求を行っている。

[**1**] a が b よりも、限りなく大きいとき、点 P の軌跡は半径 a の円とほぼ一致する。

[**2**] 逆に b が a に限りなく近いときも、同様に P の軌跡は半径 a の円とほぼ一致する。

[**3**] $a=10$,$b=0.1$ の点 P の軌跡と $a=10$,$b=9.9$ の軌跡は一致する。実はこれは当たり前のことで、式の前後を入れ替えただけだからだ。ただし図形を形成する過程は逆回転である。

[**4**] 一般に、2 つの大円の半径をたして、大円の半径と一致するとき、その 2 つの小円の定点 P の描く軌跡は一致する。(逆回転で）大円の半径が大円の半径の 2 倍のときだけは、定点 P の描く図形は大円の中心を xy 座標にとった場合の x 軸上にある直線となる。

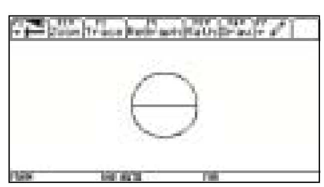


図 17: 軌跡は直線

先生からの一言

探求の [3] はとても面白かった。その理由もきちんと説明できています。特に図形は同じであるが、その書き順が反対であるという観察はすばらしいと思いました。

池田龍介 エピクロイド（外サイクロイド）で、2 つの円の半径を同じにしたとき、その図形がカージオイドに似ている気がしたので、数値をいろいろ変えてみたところ

パラメーター表示 $\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\sin(\frac{\pi}{2} - (t + \frac{a}{b}t)) - 0.5 \\ y = (a+b)\sin t - b\cos(\frac{\pi}{2} - (t + \frac{a}{b}t)) \end{cases}$ ただし $a = b = 0.5$

と、極方程式 $r = 1 - \cos\theta$ の形がそっくりであった。

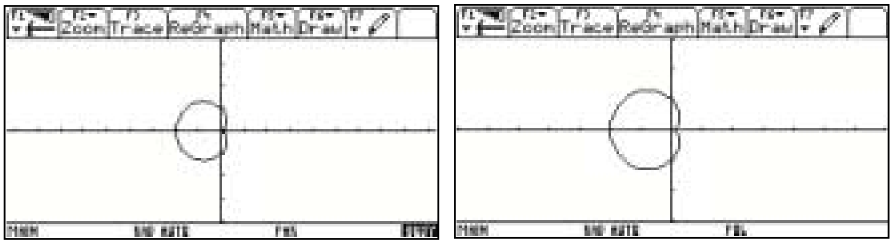


図 18: 左外サイクロイド右カージオイド

まず 2 つの Table を見てみた。しかし、パラメータの方は、t と x と y 、極座標の方は θ と r で表されていたのでこのままでは比較しようがない。計算すれば比べることができるが、数値を見てやる気をなくした。

そこで式の変換で証明してみようと思う。

極方程式　$r = 1 - \cos\theta$ の両辺に r をかけて $r^2 = r - r\cos\theta$ 。ここで変換の式 $r^2 = x^2 + y^2$ $x = r\cos\theta$ より $x^2 + y^2 = r - x$ となる。しかし r が残った。困った。

パラメータの方を考えると、

$$\begin{aligned} x = \cos t - \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - (t+t)) - 0.5 &= \cos t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2} \\ &\cos t - \frac{1}{2}(2\cos^2 t - 1) - \frac{1}{2} \\ &\cos t - \cos^2 t \qquad\qquad = \cos t(1 - \cos t) \\ y = \sin t - \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - (t+t)) &= \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ &= \sin t - \sin t\cos t \\ &= \sin t(1 - \cos t) \end{aligned}$$

よって $y = x\tan t$ t が消えない。困った。

さて、r も t も消えてくれない。TI-92 にやらせてみたらメモリ不足ですとか言ってきた。これはいじめか?

まあいい。他の方法を探してみよう。何があるだろう?ベクトルはどうだろうか。成分表示にしてもパラメータと同じような気がする。

先生からの一言

失敗しましたが、着想は非常にユニークで気に入った。ただ r が消えてくれないと嘆いていますが、これは消えますよ。ところで君の疑問点は私も解決方法を知りません。何かの書物で調べてみて、わかったら教えてください。

後日談

先生証明ができました。生徒に解説をして、1 週間ほどしてから、彼がやってきました。パラメータを消去することばかり考えていたのですが、二つの式がまったく同じであることは次のようにしてわかります。
まず $r = 1 - \cos\theta$ は $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ と変形できる。
次にパラメータの方は $x = \cos t(1 - \cos t)$, $y = \sin t(1 - \cos t)$ までは前回までと同じ。ここで t を消去しようと思わないで、これが、$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ を満たすことを示そうと言うのです。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \cos^2 t(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t(1 - \cos t)^2 \\
&= (1 - \cos t)^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \\
&= (1 - \cos t)^2 \\
(\text{右辺}) &= \sqrt{(1 - \cos t)^2} - \cos t(1 - \cos t) \\
&= (1 - \cos t) - \cos t(1 - \cos t) \\
&= (1 - \cos t)(1 - \cos t) \\
&= (1 - \cos t)^2
\end{aligned}$$

これで (左辺) と (右辺) が等しいことが証明された。
よって　エピクロイド $\begin{cases} x = (a + b)\cos t - b\sin(\frac{\pi}{2} - (t + \frac{a}{b}t)) - 0.5 \\ y = (a + b)\sin t - b\cos(\frac{\pi}{2} - (t + \frac{a}{b}t)) \end{cases}$ ただし $a = b = 0.5$ と、
カージオイド $r = 1 - \cos\theta$ は同じ図形であることが判った。

廣田　雅人 極方程式 $r = \sin n\theta$ について次のことが判った。

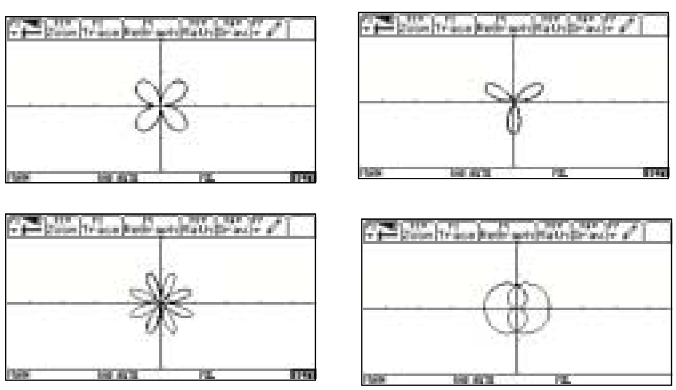


図 19: $y = \sin n\theta$ $n = 2, 3, 4, 0.5$ の順

[**1**] まず、n の値に関わらず、これらは同じ所を何度も回るグラフである。

[**2**] n が奇数のときは $\theta = 0$　から $\theta = \pi$ までを書くとグラフは完成する。また極から n 枚の花びらのようなものを描く。そして花びらの先を結ぶと正 n 角形になりそうだ。

[**3**] n が偶数のときは、$\theta = 0$　から $\theta = 2\pi$ までを書くとグラフは完成する。また極からのびていく花びらの数は $2n$ 枚となり、その先を結ぶと正 $2n$ 角形になりそうだ。また y 軸対称だ。

[**4**] $n = m + 0.5$ （m は整数）のとき、$\theta = 0$　から $\theta = 4\pi$ までを書くとグラフは完成する。また極か

ら $4n$ 枚の花びらのようなものを描く。そして花びらの先を結ぶと正 $4n$ 角形になりそうだ。ただし $r=\sin 0.5\theta$ だけは形が変わっている。どれも y軸対称だ。極方程式 $r=\cos n\theta$ について次のことが判った。

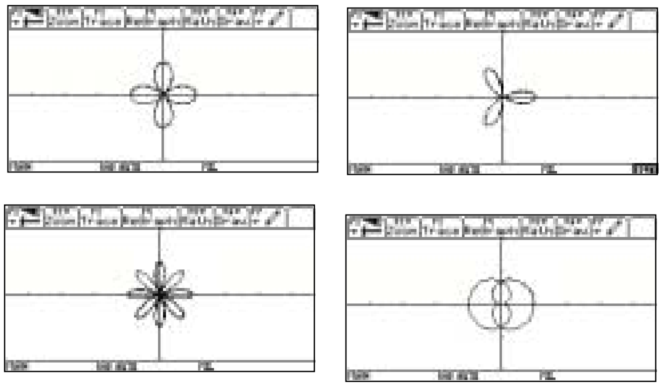


図 20: $y=\cos n\theta$ $n=2,3,4,0.5$ の順

[1] n が整数の場合は、$r=\cos n\theta$ のグラフは $\frac{\pi}{2}$ だけ極を中心に $r=\sin n\theta$ のグラフを回転させたもののようである。しかしグラフを描き始める点は、$r=\sin n\theta$ が極であるのに対し、$r=\cos n\theta$ は点 $(1,0)$ である。言い換えると $r=\cos n\theta$ は必ず点 $(1,0)$ を通る。

[2] $n=m+0.5$ の場合は $r\cos n\theta$ と $r=\sin n\theta$ のグラフは同じものになる。このときもグラフを描き始める点は

$r=\tan n\theta$ について

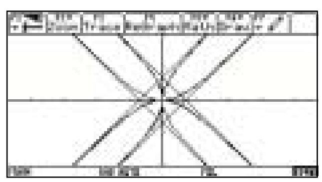


図 21: $y=\tan 2\theta$

[1] n が整数のときは、2 本の平行に見える 2 線分（平行ではない）が $2n$ 組現れる。また θ が大きくなればばるほど、線分は長くなる。

先生からの一言

廣田君らしい着眼でした。たしかに君の言うような分類ができそうですね。欲を言えば、東君の考えを少し参考にして、$y=\sin n\theta$ のグラフと $r=\sin n\theta$ のグラフを並べて眺めてみると、もう少し面白いことに気がついたかも知れませんね。さらに追求して何かがわかれば、レポートしてください。