

1 絶対値記号のついた関数のグラフの探求

- [1] **MODE** を選択し、graph を function に指定する。
- [2] **Y=** を選択し、関数を入力する。このとき絶対値を入力するには、`abs()` を使用する。
例 $|\sin x|$ は `abs(sin(x))` と入力する。

ACTIVITY

適当に絶対値記号の付いた関数を入力し、そのグラフを描かせよ。

ACTIVITY

諸君は絶対値のついた関数が与えられれば、グラフ電卓がなくてもそのグラフを描くことは出来るでしょう。今日はその反対のことをしてみましょう。
グラフが下に描いた図のようになるには、どのような式が適当でしょう。必ず絶対値記号を使用すること。

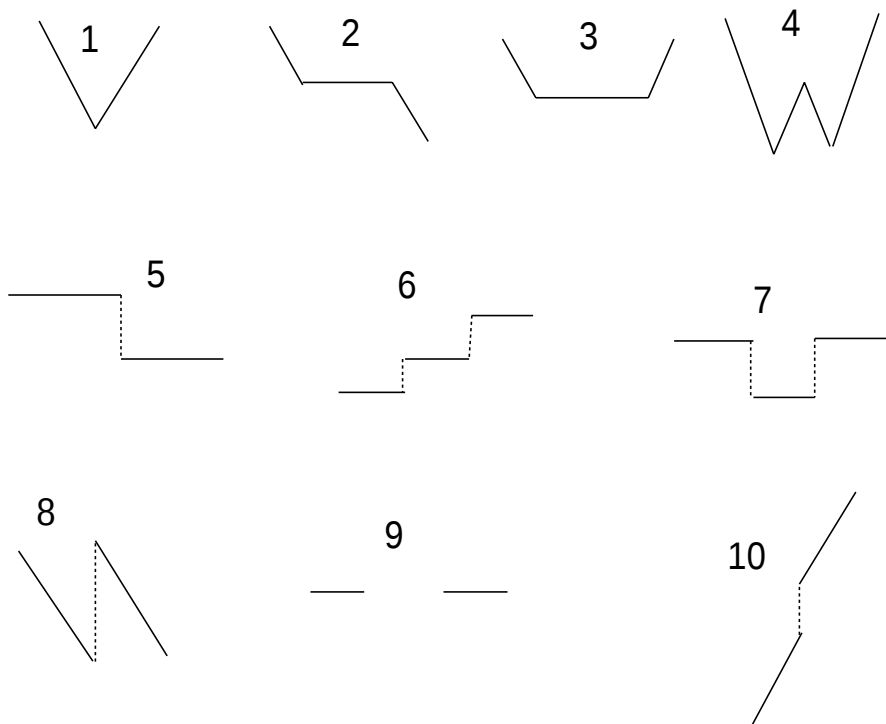


図 1: 描きたいグラフの形

ACTIVITY

上の図形以外で、自分で書いてみたい形があれば、それに挑戦しよう。また偶然でもよいからおもしろいグラフができればそれも発表しよう。

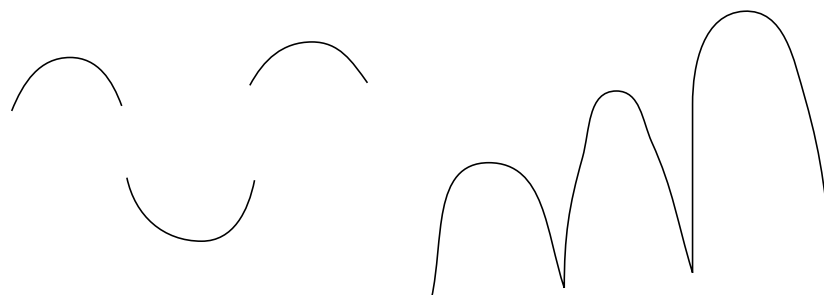


図 2: sample

1999 年 7 月 2 日の金曜日、清風の姉妹校である、英国のモンマススクールからポール・サンダースご夫妻がこられて、グラフ電卓の授業を見学された。ご夫妻は共にモンマススクールの数学の先生である。授業を変更して 1・2 時限の連続 2 時間で行った。ご夫妻にも予備の TI-92 を持ってもらい、一緒に楽しんだ。彼らは TI-92 を使って授業をしているようで、その操作は完璧であった。

最初の ACTIVITY は 5 分程度でほとんどの生徒が切り上げ、2 番目の ACTIVITY に挑戦をしていた。No1, No3, No4 はほとんどの生徒が 10 分以内に完成し、(もちろん式は生徒により、いろいろであった) No2 に専念していた。

1 時限目の終わりが近くなっても、No2 ができない。サンダース先生はかなり早い段階で No2 ができたと言っていたので、彼の作品をスクリーンに映した。それは次のグラフである。

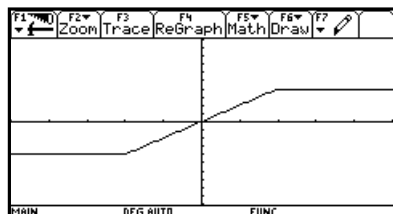


図 3: サンダース先生の作品

式は $y = |x + 2| - |x - 2|$ である。

ところが、これは No2 の形ではない。生徒もこの形はいくらでも作成していたわけで、よく似ているが No2 ではない。

1 時限目の終了間際に、ある生徒がついに完成したと言った。それをスクリーンに映す。

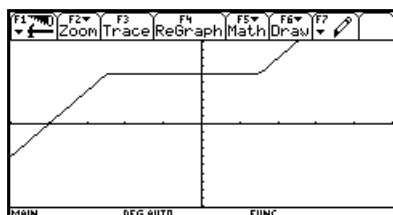


図 4: No2

式は $y = ||2x - 3| + 2x + 3| - ||2x + 5| - 2x - 5|$ である。

彼の電卓の履歴を見ると、この式の前に $||x| + x|$ があり、その次に $||2x - 3| + 2x + 3|$ がある。これらを表示すると次のようになる。

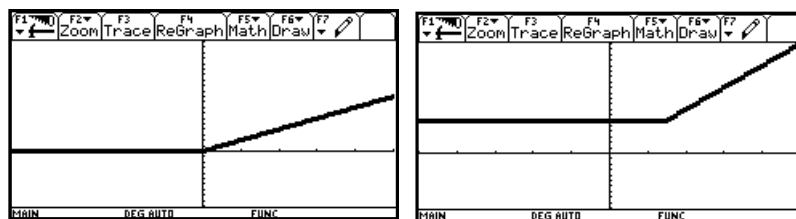


図 5: No2 のきっかけ

これらは、No2 の形の一部分である。これの反対のものを作って、それを合成すれば良いだろうというのが彼のアイデアである。

休憩をはさんで、2 時限目は No5, No6, No7 に興味に移った。これもなかなか完成しない。生徒の予想は「これはできないのではないか」ということであつた。サンダース先生は、完成させてにこにこしていたので、「サンダース先生ができたようだから、みんなにみせましょう」といって、彼の電卓を拝借し、スクリーンにグラフだけを見せた。

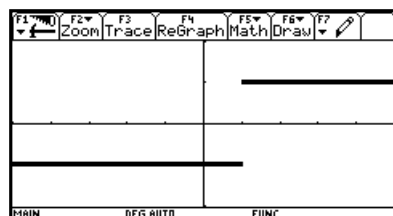


図 6: サンダース先生の作品

これで、できるんだということがわかって、俄然夢中になった。

2時限目の中程である生徒が歓声をあげた。できたようである。

式は $\frac{|x|}{x}$ であった。

これができると、No6, No7 は結構簡単に処理できた生徒が多くなった。

No6 は $5 \left(\frac{|x+5|}{x+5} + \frac{|x-5|}{x-5} \right)$ や $\frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2}$ などが考えだされた。

No7 は $\frac{|x-1|}{x-1} - \frac{|x-2|}{x-2}$ や $\frac{|x-1|}{x-1} \times \frac{|x-2|}{x-2}$ などがある。

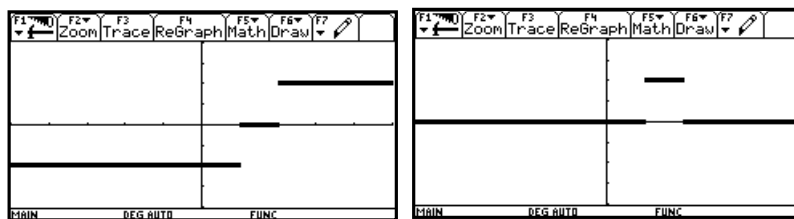


図 7: No6, No7

さて、まもなく授業も終わりとする頃になって、No9 を完成させた生徒が現れた。

その式は $\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{\sqrt{x^2-1}}$ である。別の生徒が違う式を見つけた。それは $\frac{|\sqrt{\sin x}|}{\sqrt{\sin x}}$ である。

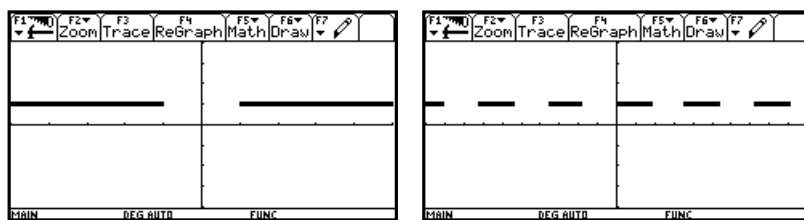


図 8: No9

特に後者の式を考えた生徒は、最初 window の設定が $-5 \leq x \leq 5$ であったので、希望の No9 ができなかったが、理由を考えて window を広げ、さらに広げてついに、No9 の連続形を完成させた。

ベルが鳴る直前にある生徒が、私も考えつかなかった、実におもしろい式を考えた。それは $\frac{5}{1 + \frac{|x+5|}{x+5} \times \frac{|x-5|}{x-5}}$ である。

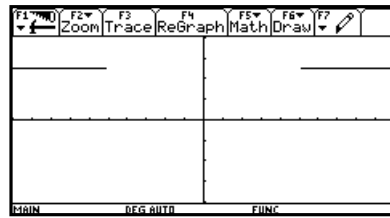


図 9: No9

これで、この時間は終了した。No8, No10 は課題レポートとして残った。最後の ACTIVITY を含めて、今後のレポートが楽しみである。

2 レポート紹介

佐内正治 $y = \frac{|x-1|}{x-1} - \frac{|x-5|}{x-5}$ をグラフにしたら長方形のようなグラフになった。(驚いた)

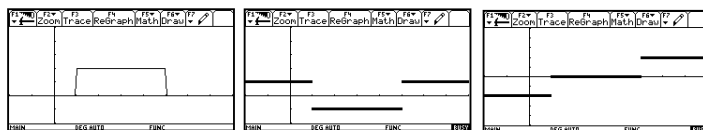


図 10: 佐内正治君のグラフ

計算で確かめると

$$\begin{aligned} x < 1 \text{ のとき } y &= -\frac{(x-1)}{x-1} + \frac{(x-5)}{x-5} = 0 \\ 1 < x < 5 \text{ のとき } y &= \frac{x-1}{x-1} + \frac{x-5}{x-5} = 2 \\ 5 < x \text{ のとき } y &= \frac{x-1}{x-1} - \frac{x-5}{x-5} = 0 \end{aligned}$$

縦の線はよく調べてみると、style を square にしたら消えたのでたいしたグラフではなかった。つまり上のグラフは 7 番の形だった。

$y = \frac{|x-1|}{x-1} \times \frac{|x-5|}{x-5}$ はなぜ 7 番の形になるのかを考えた。

計算ですと

$$\begin{aligned} x < 1 \text{ のとき } y &= -\frac{(x-1)}{x-1} \times -\frac{(x-5)}{x-5} = 1 \\ 1 < x < 5 \text{ のとき } y &= \frac{x-1}{x-1} \times -\frac{x-5}{x-5} = -1 \\ 5 < x \text{ のとき } y &= \frac{x-1}{x-1} \times \frac{x-5}{x-5} = 1 \end{aligned}$$

で納得した。

$y = \frac{\frac{|x-1|}{x-1}}{\frac{|x-5|}{x-5}}$ でもかけ算をしたときと同じグラフになった。

$$\begin{aligned} x < 1 \text{ のとき } y &= \frac{-\frac{(x-1)}{x-1}}{-\frac{(x-5)}{x-5}} = 1 \\ 1 < x < 5 \text{ のとき } y &= \frac{\frac{x-1}{x-1}}{-\frac{x-5}{x-5}} = -1 \\ 5 < x \text{ のとき } y &= \frac{\frac{x-1}{x-1}}{\frac{x-5}{x-5}} = 1 \end{aligned}$$

$y = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-5|}{x-5}$ のグラフは 6 番の形になった。

彼はこれも計算で確かめている。

少し大きいグラフになったが、それらしいグラフにできた。

$$y = -x^2 + 5|x + 1| + 5x + |9x - 36|$$

加藤有樹 $y = x - 2$ のグラフは (1) で、 $y = |x - 2|$ にすると (2) になる。

$y = x^2 - 3x + 2$ のグラフは (3) で、 $y = |x^2 - 3x + 2|$ のグラフは (4) だから $y = |x| - 2$ のグラフは (5) で、 $y = ||x| - 2|$ のグラフは (6) になる。

$y = \sin x$ のグラフは (7) で、 $y = |\sin x|$ のグラフは (8) である。

$y = |x + 2| + |x - 3|$ のグラフは (9) で、 $||x + 2| + |x - 3||$ のグラフも (9) である。

これらよりグラフの式全体に絶対値記号をつけると、元のグラフの負の部分が x 軸について対象に、正の部分に移る。

でも、 $y = \sqrt{x^2 - 4}$ のグラフは (10) で $y = |\sqrt{x^2 - 4}|$ のグラフは (11) になる。つまり虚数に絶対値をつけたものはグラフに表れる。

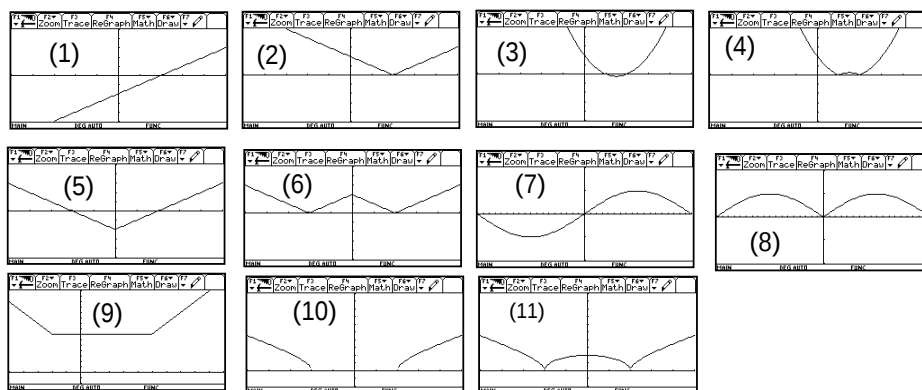


図 14: 加藤有樹君のグラフ

久保田千尋 10 番のグラフを作りたい。 $y = \frac{|x+5|}{x+5}$ のグラフは階段のようになったので、この直線部分に傾きをつけたい。

そこで、 $y = \frac{2x|x+5|}{x+5}$ という式を考えた。このグラフを書かせると下のようになった。これは少し違う。

計算で調べると

$$\begin{aligned} x \geq 0 \text{ のとき } \frac{2x(x+5)}{x+5} &= 2x \\ x < -5 \text{ のとき } \frac{-2x(-x-5)}{x+5} &= 2x \end{aligned}$$

問題は $-5 < x < 0$ の範囲だ。このとき式は $\frac{-2x(x+5)}{x+5} = -2x$ となってしまう。

失敗だ。

次に $\frac{2x|x+5|}{x+5}$ は下の図のようになる。

次に $2x + \frac{|x+5|}{x+5}$ のグラフはそれらしいものができた。

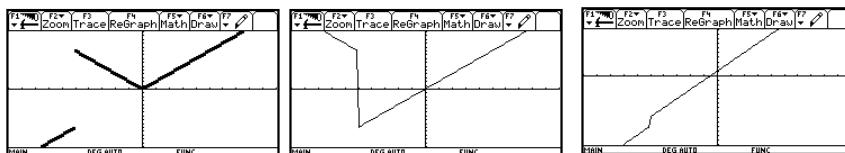


図 15: 久保田千尋君のグラフ

これが本当に自分の求めようとしているものなのか。計算で調べる。

$$x < -5 \text{ のとき} \quad 2x + \frac{-(x+5)}{x+5} = 2x - 1$$

$$x > -5 \text{ のとき} \quad 2x + \frac{(x+5)}{x+5} = 2x + 1$$

$$x = -5 \text{ のとき} \quad 2x$$

これでは $x = -5$ のときに点線にならない。だからこれではない。結局わからなかった。

山本直人 階段グラフを考える。このグラフはある 1 点を境にして、 y の正負を逆にすることができれば書ける。

そこで $\frac{|x|}{x}$ を作った。これは $x \geq 0$ のとき 1 で、 $x < 0$ のとき -1 となる。

同様に $\frac{|x+5|}{x+5}$ は -5 で符号が変わることを意味する。

$y = 10 \times \frac{|x+5|}{x+5}$ は $x \geq -5$ のとき $y = 10$ で $x < -5$ のとき $y = -10$ のグラフを書く。

次に $y = \frac{|x+5|}{x+5}$ と $y = \frac{|x-5|}{x-5}$ をたせば $x < -5$ のとき $y = -2$, $-5 \leq x < 5$ のとき $y = 0$, $x \geq 5$ のとき $y = 2$ のグラフができる。

次にこの $\frac{|x+5|}{x+5}$ と $\frac{|x-5|}{x-5}$ をかけると $x < -5$ のとき $y = 1$, $-5 \leq x < 5$ のとき $y = -1$, $x \geq 5$ のとき $y = 1$ となり、このグラフは次のようなる。

では 9 番のような穴あきのグラフはどうすればよいか。

y の値がないということは分母が 0 のときである。上のグラフを使うと $y = 1 + \frac{|x+5|}{x+5} \times \frac{|x-5|}{x-5}$ これは $x < -5$ のとき $y = 2$, $-5 \leq x < 5$ のとき $y = 0$, $x \geq 5$ のとき $y = 2$ となる。これを分母にすれば $-5 \leq x < 5$ のとき y の値はなくなるので、 $y = \frac{2}{1 + \frac{|x+5|}{x+5} \times \frac{|x-5|}{x-5}}$ で完成だ。

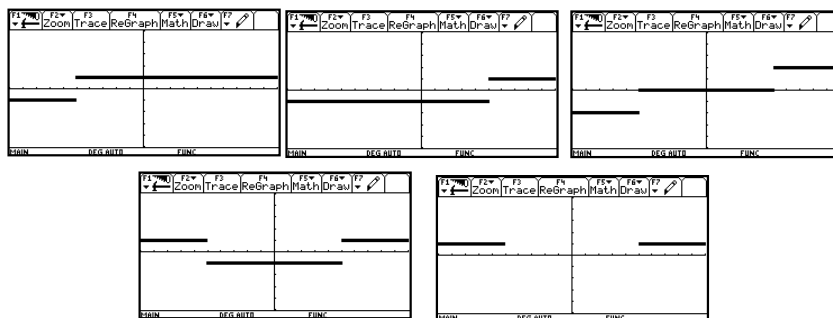


図 16: 山本直人君のグラフ

田中義智 $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{|x^2-1|}}$ は穴があく。これに x をかけてみると $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{|x^2-1|}} \times x$ は次のようになる。 $y = \frac{x}{|x|}$ の

グラフは図のようで、これに x をかけるとグラフは V の字形になる。これは $\frac{x}{|x|} \times x = \frac{x^2}{|x|} = \frac{|x|^2}{|x|} = |x|$ だから納得。

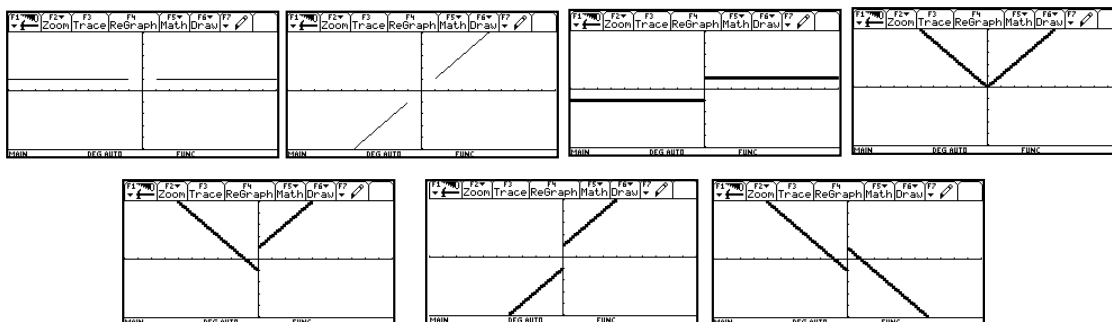


図 17: 田中義智君のグラフ

さて $\frac{x}{|x|}$ に $(x+1)$ をかけると $x \geq 0$ のとき $y = x+1$ で $x < 0$ のとき $y = -x-1$ でグラフは次のようになる。ここで $x < 0$ のときの x の係数の符号がかわれば (10番) のグラフになる。よって $y = \frac{x}{|x|}(|x|+1)$ が求める関数である。

以上より (8) 番のグラフは (10) 番のグラフと傾きが逆なだけなので、 $y = -x + \frac{x}{|x|}$ である。

中谷祐哉 絶対値は負の部分を正にすることができる。グラフで考えるとグラフの負の部分が x 軸対称に正へと折り返る。

例えば、 $y = |x-5|$ を考えると、このグラフの $x < 0$ の部分が折り返り、V 字形のグラフになる。これを応用していくと、この式の右辺から再び 5 を引いて、全体に絶対値をつけると V 字の谷の部分が負になり、この部分が x 軸対称に折り返るので W 字形のグラフになる。

この操作を繰り返していくと、ギザギザの図形ができる。これは直線のグラフ以外でも応用できるのもっと面白い図形もできるかもしれない。

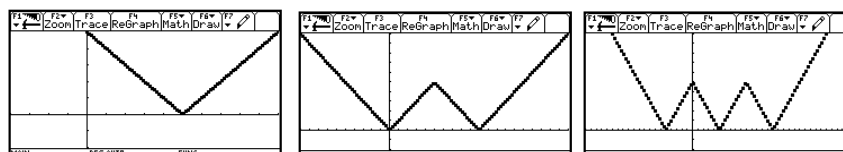


図 18: 中谷祐哉君のグラフ

水口智貴 最後の ACTIVITY の 3 つの山形を書くのに、まず $|\cos x|$ のグラフから考えることにした。このグラフの正の部分に注目して、このグラフに正の数でだんだん数が大きくなる数 x をかければなると思い、 $y = |\cos x| \times x$ のグラフを書かせらできた。

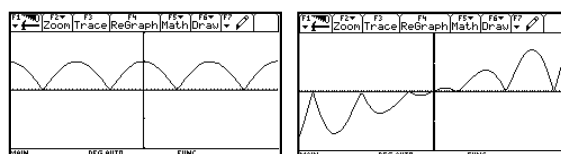


図 19: 水口智貴君のグラフ

次に「にこにこマーク」は 7 番のグラフを利用すれば出来るかもしれないと思ったができなかった。

安達祐介 2 番のグラフ (A) を作るには (B) と (C) を組み合わせればよいと考えた。

(B) のグラフを作るには $y = -|x|$ と $y = x$ を組あわせれば良いと閃いた。(ただし 2 つのグラフの傾きと y 切片が等しくなければならない)

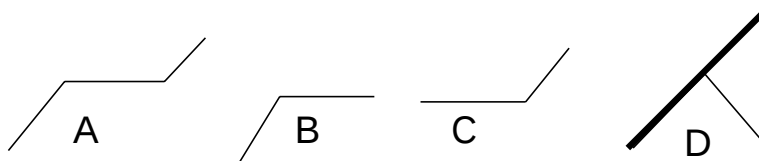


図 20:

まず $y = -|x| + x$ ① のグラフは次の図

同様に (C) のグラフを作るには $y = |x|$ と $y = x$ を組み合わせて、 $y = |x| + x$ ② でできる。

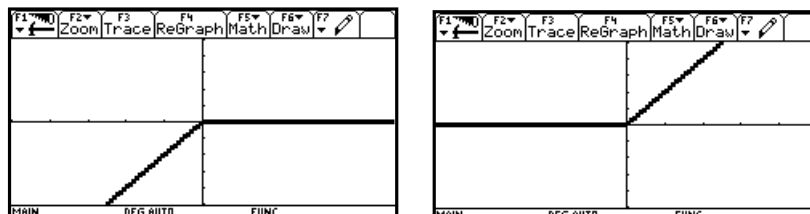


図 21:

そこでこれらの 2 つの式を足すと目的の 2 番のグラフができると思ったが、実際にたすとただの直線になった。(理由は簡単で $(-|x| + x) + (|x| + x) = 2x$ だから)

そこで①のグラフを x 軸の負の方向へ、② のグラフを x 軸の正の方向へ平行移動させた。

$$y = -|x + 3| + (x + 3) \text{①}$$

$$y = |x - 4| + (x - 4) \text{②}$$

この 2 つを加えると完成する。

$$\text{つまり } y = -|x + 3| + (x + 3) + |x - 4| + (x - 4)$$

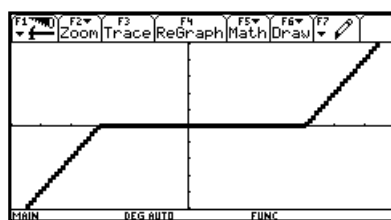


図 22:

一般には $y = -|x - b| + (x - b) + |x - a| + (x - a)$ ただし $a > b$ のグラフは 2 番の形になる。

池田龍介 授業中に 5 番のようなグラフは $\frac{x}{|x|}$ または $\frac{|x|}{x}$ の形で作れることがわかった。ということは 10 番のようなものは $\frac{x}{|x|}$ に傾きをつけてやれば良いのではないだろうか。

そこで $\frac{x-5}{|x-5|} \times |-x|$ を作るとへんなものができた。

次に $\frac{x-5}{|x-5|} \times \frac{x-10}{|x-10|} \times (-x)$ をさせてみた。すると次のグラフができた。

ここでこれに 10 を足してみた。このグラフは上に 10 移動したものだから描かなくてもいいだろう。

次にこれを全体に絶対値でくくり $y = \left| \frac{x-5}{|x-5|} \times \frac{x-10}{|x-10|} \times (-x) + 10 \right|$ とするとグラフは次のようになった。

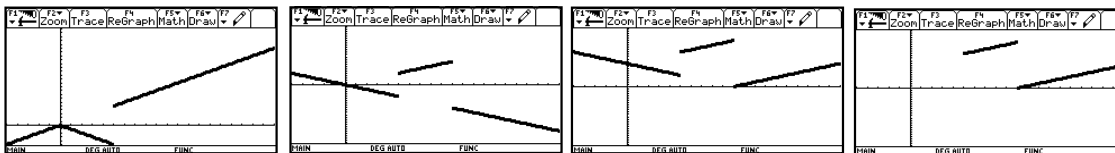


図 23: 池田龍介君のグラフ

とにかく平行なものを作ればよいので $y = \left| \frac{x-5}{|x-5|} \times \frac{x-10}{|x-10|} \times (-x) + 10 \right| \quad x > 5$ とすると目的のグラフができた。範囲指定してはダメだとは言われていないのでこれでも良いだろう。

$y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ を書かせると 5 番の連続ができた。よって $\frac{\sin 30x}{|\sin 30x|}$ だと次のようになる。これはサインが正の時は 1 で負の時は -1 になるからだ。

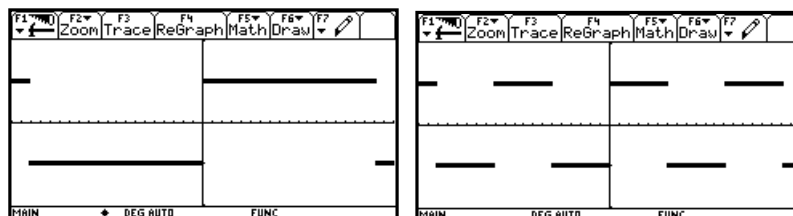


図 24: 池田龍介君のグラフ

稲住肇 9 番について考えた。いろいろ式がでてきたが自分なりの式は

$$y = \frac{|x-1|i}{x-1} + \frac{|-x-3|i}{-x-3} + 3 + \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$y = \frac{|x-1|i}{x-1} + \frac{|-x-3|i}{-x-3} + 1$$

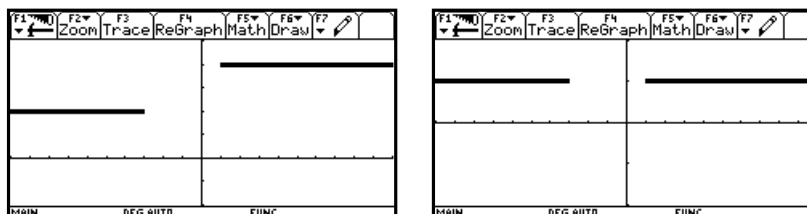


図 25: 稲住肇君のグラフ

この 2 つを比べると $\frac{|x-1|}{x-1}$ が上下にずれる理由だと思う。

このことから、8 番や 10 番は

$$y = -2x + \frac{|x+2|}{x+2} \text{ や } y = 2x + \frac{|x+2|}{x+2} \text{ ができる。}$$

この式で x の係数が傾きであり、 $|x + \alpha|$ の α がどこでずれるか、 $\beta \frac{|x+2|}{x+2}$ の 2β が 2 直線の距離を示している。

上村正樹 $y = 2 \times \frac{|x-2|}{x-2} + 1$ のグラフは、 x のとる範囲で分けると 2 つのグラフの合成形と見なせる。これは $x = 2$ のときグラフは切れている。

$$y = \frac{|x-1| \times |x-2| \times |x-6|}{(x-1)(x-2)(x-6)}$$

は次のようなグラフになる。

ここで分母にどんどん x の 1 次式をかけ、その式の絶対値を分子にかけていくと、何個でも切れ目を入れて、 y の値を交互に入れ替えることが可能である。

以下省略

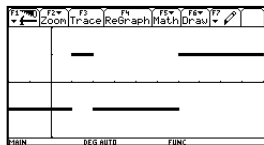


図 26: 上村正樹君のグラフ

2000 年の新学期早々に上田侑正君が「ニコちゃんマーク」を完成させてレポートしてくれた。これを紹介する。

$$y = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$y = -\sqrt{-\sin x} - \frac{1}{2} \quad (2)$$

(1),(2) のグラフを組み合わせばよい。

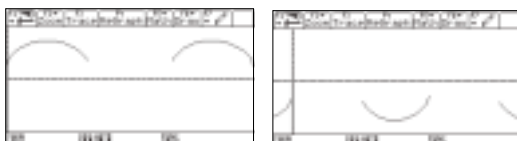


図 27: 2 つのグラフ

(1),(2) 式を比較してみると、(2) 式は (1) 式の根号と $\sin x$ と $\frac{1}{2}$ の前に -1 がかけられただけであることが判る。

よって $180^\circ < x < 360^\circ$ で -1 その他の範囲で 1 となるものは、階段グラフを参考にとすると、

$$-\frac{|x - 180^\circ|}{x - 180^\circ} \times \frac{|360^\circ - x|}{360^\circ - x} \quad (3)$$

であるので、ニコちゃんマークの式は

$$-\frac{|x - 180^\circ|}{x - 180^\circ} \times \frac{|360^\circ - x|}{360^\circ - x} \times \sqrt{-\frac{|x - 180^\circ|}{x - 180^\circ} \times \frac{|360^\circ - x|}{360^\circ - x} \times \sin x} - \frac{|x - 180^\circ|}{x - 180^\circ} \times \frac{|360^\circ - x|}{360^\circ - x} \times \frac{1}{2}$$

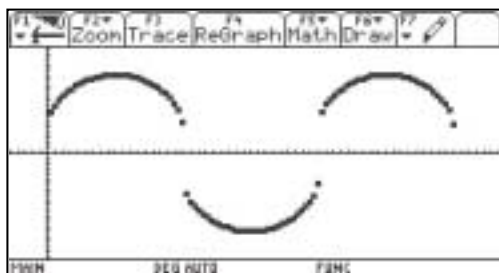


図 28: 上田君のニコちゃんマーク

先生からの一言

長い間、たくさんの人が挑戦していただろうと思いますが、ついに完成しました。彼の説明を読むと、単純な発想ですね。多くの方がこの発想を持っていたと思われます。しかしそれを実現することが困難だったのです。現実の世界も同じです。いくらよいアイデアを持っていても、それを商品にする技術力がなくては成功しませんね。とにかくすばらしい作品でした。

ちなみに私が考えた「ニコちゃんマーク」を紹介しておきます。

まず、 $\frac{|x-1|}{x-1}$ は $x = 1$ において「断層」を作ります。

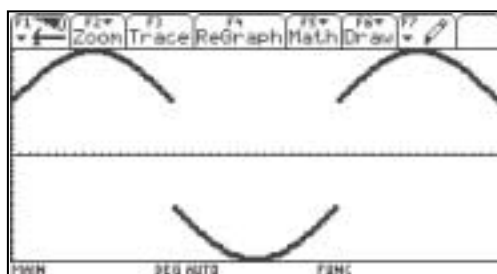
さらに $\frac{|x-1|}{x-1} \times \frac{|x-2|}{x-2}$ は $x = 1$ と $x = 2$ の2カ所に「断層」を作ります。

$y = \sin x$ のグラフを $0^\circ < x < 540^\circ$ の範囲で描いておいて、これに $x = 180^\circ$ と $x = 361^\circ$ の2カ所に「断層」を作ればよいだろう。

これが私の考えです。式は

$$\frac{|x-180|}{x-180} \times \frac{|x-360|}{x-360} + \sin x$$

です。このグラフは次のようになります。



さて、上田君のと私のを比較すれば、上田君のマークの方が丸みがあって、いかにも「ニコちゃん」の雰囲気が出てくると思います。なぜ彼のが丸みを帯びたかという、それは $\sin x$ ではなく $\sqrt{\sin x}$ を使ったからです。

最後に二人のグラフを重ねて観ました。なかなかよい顔になりました。

