高次不等式の探求

1 すでにわかっていること

2 次不等式は、2 次方程式と 2 次関数のグラフを利用すると絵を見てとくことができた。

君たちは、高次方程式の解き方を学習した。あとは 3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ や、4 次関数 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ のグラフの概形がわかれば高次不等式も解けるはずだ。

[**1**] MODE を選択し、graph を function に指定する。
[**2**] Y= を選択し、適当に 3 次関数の式を入力し、window を設定するとその 3 次関数のグラフが描かれる。

ACTIVITY

3 次関数のグラフの形を分類せよ。

ACTIVITY

自分で適当に 3 次不等式を作り、それを解け。

ACTIVITY

4 次関数のグラフの形を分類せよ。また自分で適当に 4 次不等式を作りそれを解け。

[**1**] $\boxed{\text{MODE}}$を選択し、Graph を parametoric にし、次に F2 を選び、split screen を top-bottom にし enter を 1 回押す。つぎに split 1 app を　Home にし、split 2 app を　y=editor にして、enter を 2 回押す。これで上に home 画面、下に y=が出る。

[**2**] home の画面で方程式 $x^3 - 1 = 0$ を解く。

[**3**] Y=で解の実数部分を xt に、虚数部分を yt に入力する。

[**4**] window を適切に設定し、graph を書かせると、画面に点が現れる。実は 2 つの軸の比が違うので　F 2 で zoomsqr にする。これで $x^3 - 1 = 0$ の 3 つの解が画面に表示される。この画面をガウス平面という。

ACTIVITY

$x^n - 1 = 0$ で n を 2,3,4,5,6,7,8,9,10.... と変えて、それぞれ方程式を解かせ、その解をガウス平面に図示させよ。1 つの n が終われば、その画面を保存し、次の n は新しい画面に図示させよ。以下同様。

DISCUSSION　　and REPORT

$x^n - 1 = 0$ の解をガウス平面上に図示したとき、何かおもしろいことがないか？気のついたことをまとめよ。さらに各自で何か考えることがあれば探求せよ。

生徒のレポートより

小野直紀　$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,a, b, c, d は実数で $a \neq 0$

[1] α, β, γ が実数のとき、$(\alpha < \beta < \gamma)$ とする。
このときグラフは x 軸と 3 回交わる。

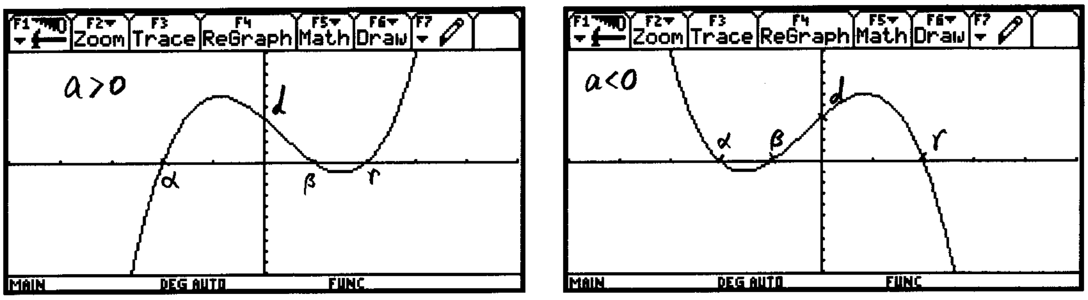


図 1:

[2] α, β, γ のうち 1 つだけが実数のとき（α だけを実数とする。）

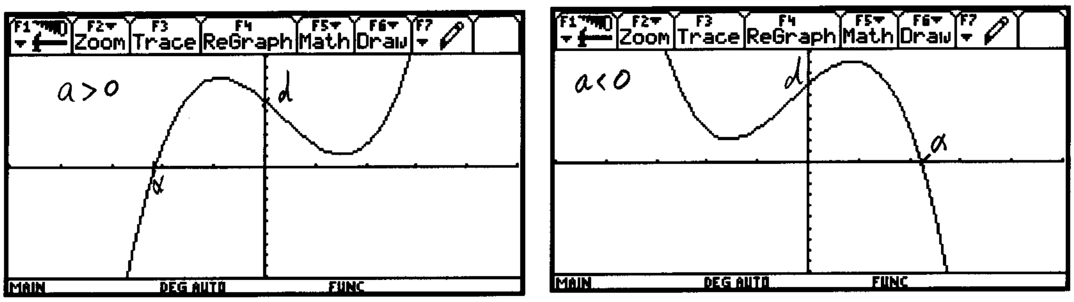


図 2:

[3] α, β, γ が実数で重解のとき（$\alpha = \beta$ とする。）

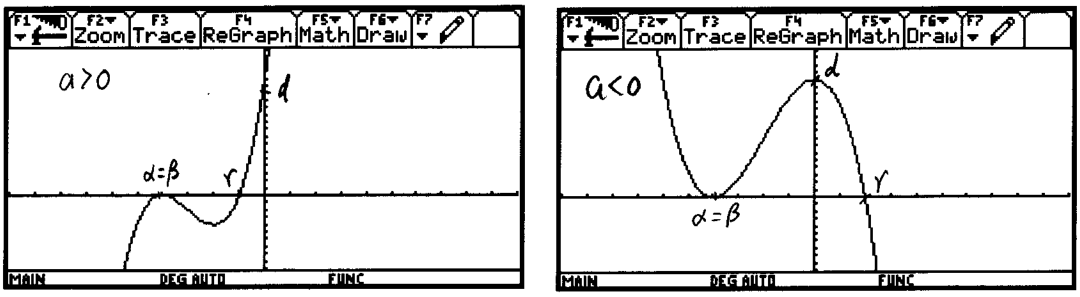
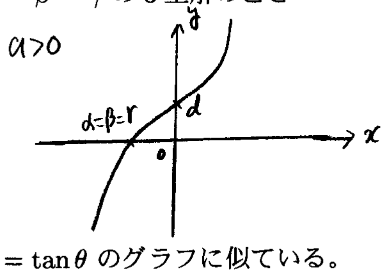
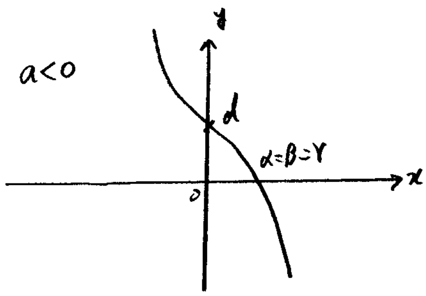


図 3:

[4] $\alpha = \beta = \gamma$ の 3 重解のとき





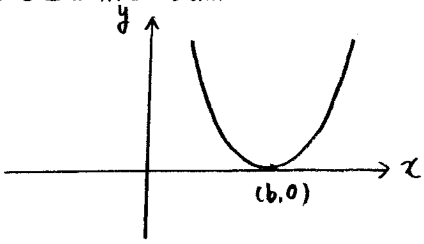
$y = \tan\theta$ のグラフに似ている。

以上により3次関数のグラフは大きく8つに分類できる。

> 先生からの一言
>
> 解の個数からグラフの分類をするというアイデアがよいですね。ところで3つの解がすべて虚数という場合を考えていませんがそんなのは無いのですか？さらに3重解のときは $y=\tan\theta$ のグラフに似ているということですが、何が似ていて、何が違うか。詳しく探求しましょう。

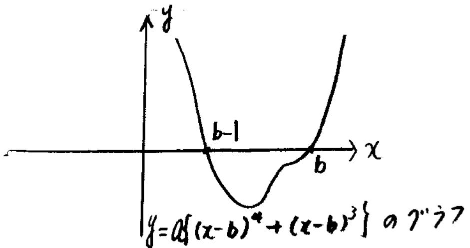
渡辺和明 4次関数について

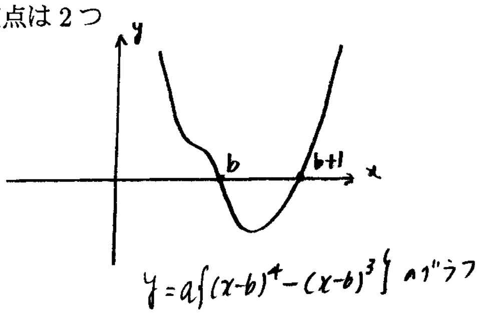
$y=a(x-b)^4$ とすると x 軸との交点は1つ



（以下 $a\neq 0$,b は実数）グラフはすべて $a>0$ のときで、$a<0$ のときは x 軸対称

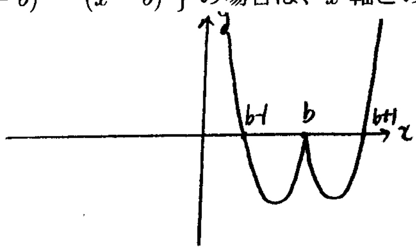
$y=a\{(x-b)^4\pm(x-b)^3\}$ の場合は、x 軸との交点は2つ





$y=a\{(x-b)^4\pm(x-b)\}$ でも同じようなグラフ

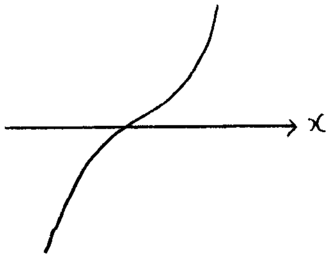
$y=a\{(x-b)^4-(x-b)^2\}$ の場合は、x 軸との交点は3つで $x=b$ の軸で対称

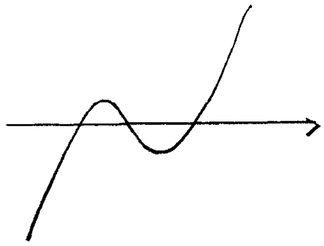


どれも展開して、因数分解するとすぐにわかるが、グラフの形がきれいなので書いた。

> 先生からの一言
>
> 式の中に $(x-b)$ を使ったのは、何か思いがあるのですか?さてどのような4次関数もこのような $y=a\{(x-b)^4\pm(x-b)^3\}$ のような形に変形できるのでしょうかね。そのあたりを追求するとさらによいレポートになるでしょう。また $y=a\{(x-b)^4+(x-b)^2\}$ についてはなぜ書いて見なかったのですか?

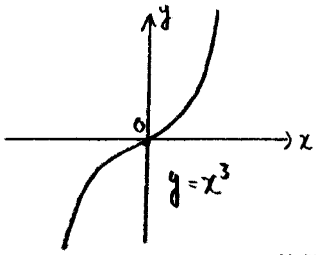
豊島了明 x^3 の係数が正の数のときグラフの形は、僕が発見した中ではこの2種類があった。

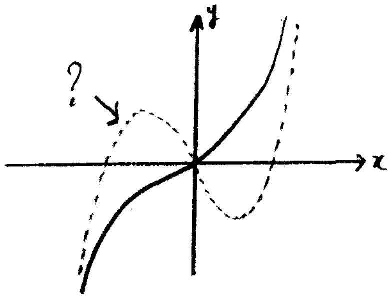




$y = x^3$ のときに、図のようになった。(0,0) を通る。

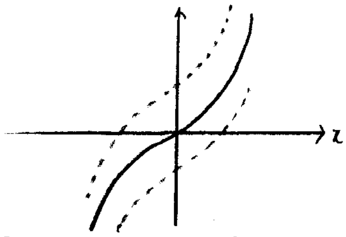
この $y = x^3$ のグラフに何らかの変化があって、だんだん図のようにゆがんだ形（点線）になるのではないかと思う。それを調べてみようと思う。





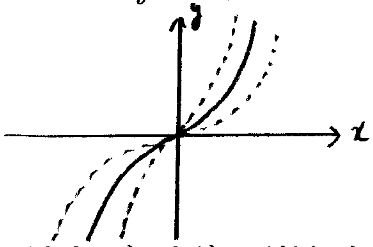
$y = x^3$ を基準とし、a, b, c, d は整数とする。

[1] $y = x^3 + d$ のとき、このグラフは y 軸方向への移動だけなのでグラフのゆがみには関係がない。



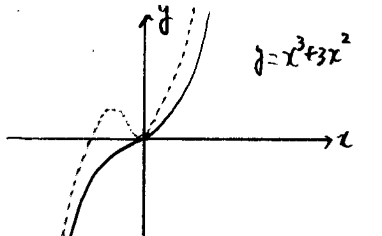
[2] またグラフが $y = ax^3$ $(a > 0)$ のとき、グラフは a が大きくなるにつれ、グラフの幅が狭くなるだけなので関係は無い。（$a < 0$ のときはグラフが逆になるだけ）

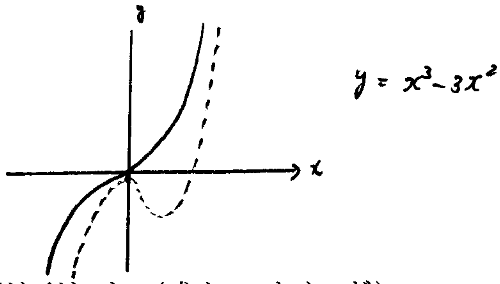
おそらく $y = x^3 + bx^2$ または $y = x^3 + cx$ の b か c の変化に関係があるのではないかと思う。



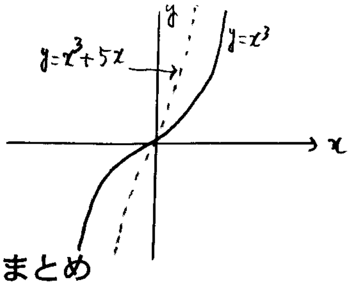
[3] $y = x^3 + 3x^2$ と仮に入れた。するとグラフは図のようになった。y 軸より左は大きく盛り上がり、右はグラフの間が狭まった。

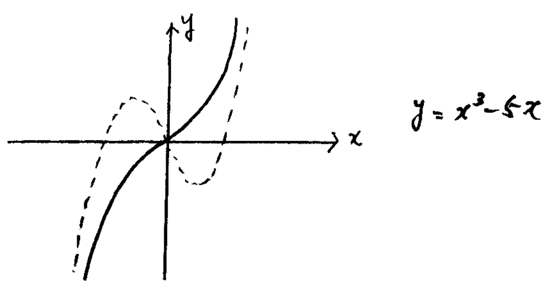
次に $y = x^3 - 3x^2$ と入れてみた。するとグラフは図のようになった。y 軸より右は大きく下がり、左はグラフの間が狭まった。





[4] $y = x^3 - 5x$ のグラフは左側が盛り上がり、右側が下がった。（求めていたやつだ）





結果のまとめ

- $y = x^3 + bx^2$ を変形すると $y = x^2(x + b)$

  $b > 0$ のとき、このグラフは $-b < x < 0$ の間にかけて、y の値は $(x + b)$ の間は正になり、

x^2 は実数の 2 乗だから正になる。だからその部分だけ x 軸の上に盛り上がったグラフになる。
$b<0$ のときも同様で、$0<x<-b$ にかけて、$(x+b)$ が負になるので、グラフが x 軸より下に行ってしまうのである。

- $y=x^3+cx$ は $y=x(x^2+c)$ と変形できる。

  $c>0$ のとき x^2 は必ず正で $c>0$ なので、グラフは x が大きければその分。グラフが狭くなるのは当たり前。

  $c<0$　のとき x^2 は必ず正であるから

  $x>0$, $x^2+c<0$ のとき y は負となり

  $x>0$, $x^2+c>0$ のとき y は正となる。

  $x<0$, $x^2+c<0$ のとき y は正となり

  $x<0$, $x^2+c>0$ のとき y は負となる。

  だからグラフはゆがんだ形になるのである。

先生からの一言

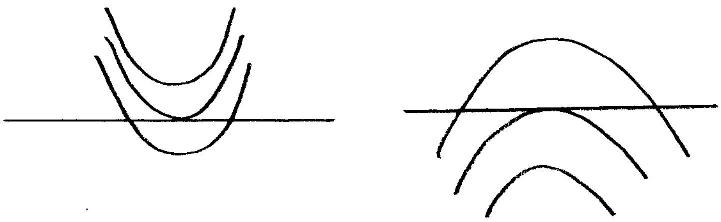
レポートの話の展開がすばらしい。実験して、何かを発見して、その仕組みを調べようとする。原因らしきものを見つけて、それを自分なりに理由を考えて説明する。高校 2 年生でこれだけのレポートが書けるということがすばらしい。

藪内伸弥 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ について

d は $y=ax^3+bx^2+cx$ のグラフを y 軸方向に d だけ平行移動させるだけだ。

$y=ax^3+bx^2+cx$ について考えると　x でくくって $y=x(ax^2+bx+c)$ 。後ろの括弧の中は 2 次関数の式だ。

2 次関数のグラフは次のような形をしている。

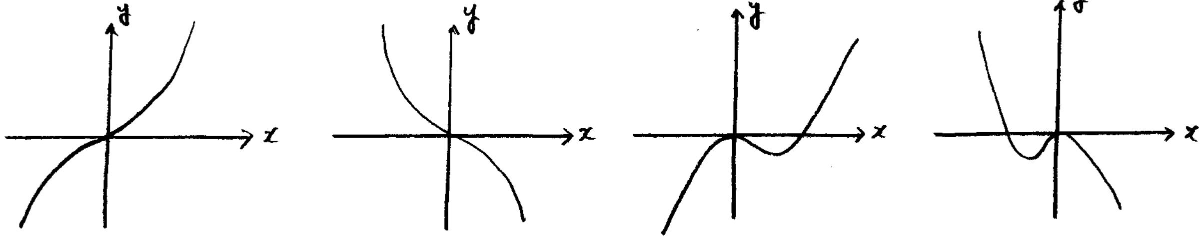


だから、前についている x が 2 次関数のグラフに影響を与えている。

さて、$y=ax^3+bx^2+cx$ のグラフの特徴は

- 必ず原点を通る。
- $y>0$ も $y<0$ も必ず存在する。
- ax^2+bx+c の頂点が $(0,0)$ の場合、原点について対称な図形になる。

グラフの例



$y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは上の図のグラフを y 軸方向に d だけ平行移動させたものである。

先生からの一言

$y=x(ax^2+bx+c)$ の x が 2 次関数のグラフに影響をあたえているという着目はすばらしいですね。さらに詳しく b や c の影響を調べるとおもしろいでしょう。

宮本拓也 $y=ax^3+bx^2+cx$ がある。$y=0$ とすると, $0=x(ax^2+bx+c)$でこれを解くと、$x=0$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となる。

定数項が 0 であれば y 方向には動かない。ということはグラフにすると確かに原点を通っている。

後の解は $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の $\sqrt{b^2-4ac}$ の部分で決まるから $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が虚数ならば、x 軸との交わりは原点 1 個、重解ならば原点とそれの 2 個、異なる実数解ならば原点とそれら 2 つの 3 個である。

先生からの一言

定数項をすてて $y=x(ax^2+bx+c)$ と分解し、2 次方程式の解の分類を用いて 3 次関数のグラフと x 軸との交わりの個数を調べるというアイデアがよかった。しかし、定数項が付け加わると、グラフは y 軸方向に動きますから、その動きの多少によって、x 軸との交わりの個数は変化するのではありませんか?

溝端勇介 2 次関数のとき、$y=a(x-p)^2+q$ とすると、a は $a=1$ のときのグラフでの a 倍の値を示し、p は $p=0$ のときのグラフから p だけ x 軸方向へ、q は $q=0$ のときのグラフから q だけ y 軸方向へ動いたグラフであると言うことだった。そこで $y=a(x-p)^3+q$ の関係を調べてみようと思った。

[1] $y=2(x-1)^3$

[2] $y=x^3$

[3] $y=(x-1)^3+100$

[4] $y=(x-1)^3$

table で調べてみると [1] の値は [4] の値の 2 倍になっていた。[3] のグラフは [4] のグラフの 100 だけ上をいっていた。[4] のグラフは [2] のグラフが 1 だけ右側へ動いていた。つまり、a 倍や平

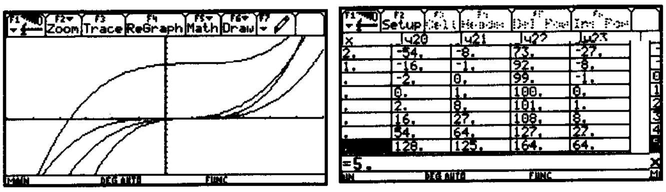


図 4:

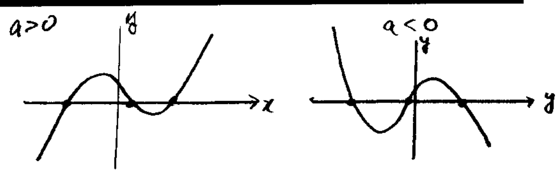
行移動については、2 次関数のときと同じ動きであった。これは普通に考えてもわかるような結果であった。

先生からの一言

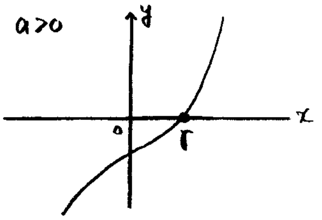
普通に考えてもわかるような結果と言ってますが、授業で習った 2 次関数の移動の性質が、3 次関数でも成り立つということを確認したということは大切なことです。確認する事によって、それがはっきりするのですから、失念することはありません。

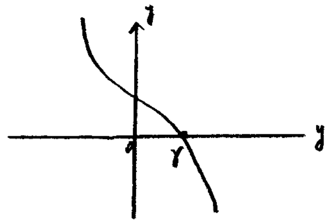
中尾征志 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ について

[1] 3 つの解 α , β , γ がすべて実数のとき

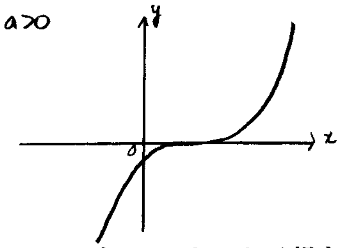


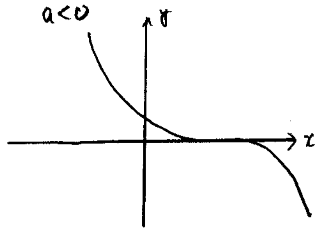
[2] 3 つの解のうち α , β が虚数で γ が実数のとき



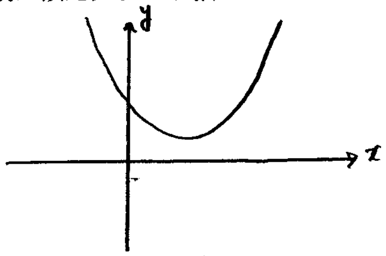


[3] 3 つの解が 3 重解のとき、つまり $\alpha = \beta = \gamma$ のとき

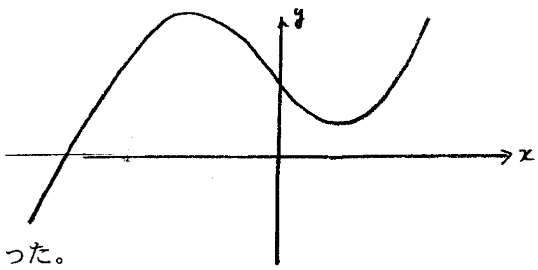




以上の 6 通りのグラフになると予想する。ところが $y = x^3 + 80x^2 - 90x + 50$ のグラフを描かせると、2 次関数に似たグラフが描かれた。



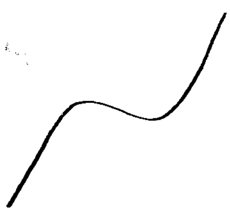
そこで、方程式 $x^3 + 80x^2 - 90x + 50 = 0$ を解くと 2 つは虚数でもう一つは実数であった。すると x 軸と交わっていなくてはおかしい。グラフを拡大してみるときちんと交わっていた。



機械は正しかった。

> 先生からの一言
>
> 機械にいろんなグラフを描かせていますが、完全に機械を信用していない姿勢がいいですね。3 次関数のグラフを描かせたら 2 次関数に似ていた。(ここで終わっては小学生ですね)でも方程式は実数解が 1 つある。では................。つまり機械に計算させ、人間はその計算の結果を利用して考える。その考えをもとにまた機械に仕事をさせる。これこそ MTT の神髄ですね。

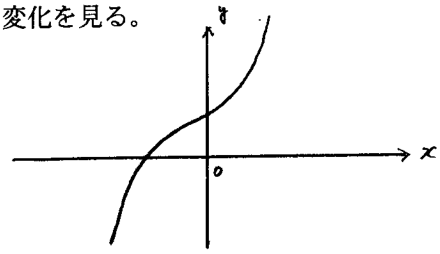
坂田大樹 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) の実数解は必ず 1 つある。その理由は $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) のグラフが基本的に図のような形で、x 軸をどこに引いてもグラフと交わるから。



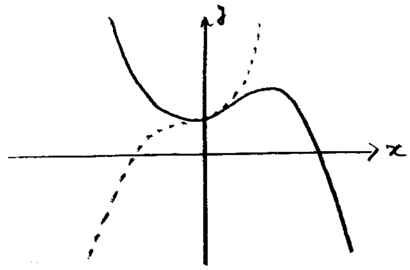
先生からの一言

なぜ基本的にこの形になるのでしょう。それを説明しましょう。どこに引いてもグラフと交わるという発見はすばらしい。

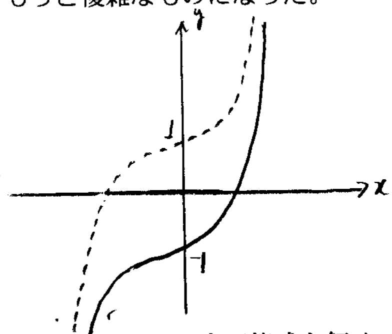
尾川真也 まず $y = x^3 + x^2 + x + 1$ の 3 次関数を描くと次のようなグラフになり。これを基本として、数値や符号を変えたときの形の変化を見る。



[1] $y = -x^3 + x^2 + x + 1$ のとき、基本のグラフと逆向きになるが、2 次関数みたいに対称の形にはならなかった。



[2] $y = x^3 + x^2 + x - 1$ のとき、$x = 0$ のときの y 座標が違うだけなので、基本のグラフを下に移動させた形になると思ったが、もっと複雑なものになった。



$x^3 - 7x + 6 > 0$ の 3 次不等式を解く。

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

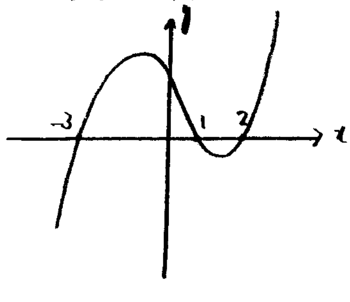
$P(x) = x^3 - 7x + 6$ とおく

$$P(2) = 8 - 14 + 6 = 0$$

よって $x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x^2+2x-3) = (x-2)(x+3)(x+1)$

方程式の解は $x = 2$, 1, -3

グラフは図のようになるので、不等式の解は　$-3 < x < 1$, $2 < x$



先生からの一言

ある基本をもとに、数値や符号を変えることによって、形がどのように変化するかをみようとする方法は探求の手法としてすばらしい方法である。
2 次関数みたいに対称にならなかった。と書いてありますが、君は 2 次関数で最高次の符号が逆になると対称になると思っているのですか？$y = x^2 + x + 1$ と $y = -x^2 + x + 1$ は対称ですか?
思ったより複雑とありますが、どのように複雑なのですか。もう少し詳しく書きましょう。
不等式の解法はこれで結構です。