1　指数表示について

そもそも事件の発端は 0^0 はいくらかということであった。TI-92 の計算によると次のように表示される。

$$0^0 = 1 \tag{1}$$
$$0^{-3} = undef \tag{2}$$
$$0^{-2} = \infty \tag{3}$$
$$0^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{4}$$
$$0^{\frac{1}{3}} = 0 \tag{5}$$
$$0^{-\frac{1}{3}} = undef \tag{6}$$
$$0^{-\frac{1}{2}} = undef \tag{7}$$

これらの結果を統一的に説明するためにはどのように考えればよいのか?

2　盧君のレポート

0^{-2} は極限を考えると正負どちらの方向から近づけても指数が偶数であるから ∞ になり，0^{-3} は正から近づけると ∞ ，負から近づけると $-\infty$ となるため答えが undef となると思われる。

同様に $0^{-\frac{1}{2}}$ も正から近づけたとき ∞ となるが，負から近づけると虚数になるためこれも undef となる。

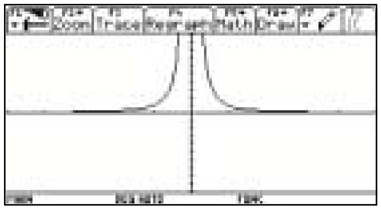
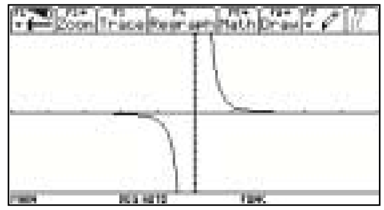
$0^{-\frac{1}{3}}$ では，負から近づけても 3 乗根をはずせるので実数がでるが，結局は $-\infty$ と ∞ が出てこれも undef となる。

これが正しいとすると $0^0 = 1$ と表示されるのは当然でしょう。

3　解説

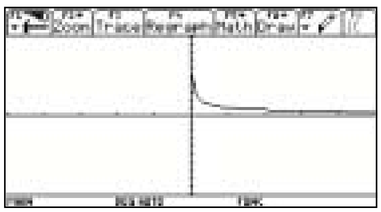
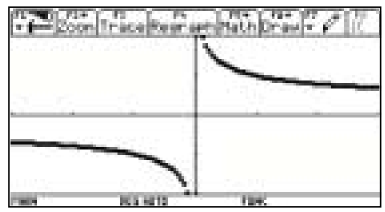
まず彼は $y = x^{-2}$ のグラフを考えています。これは $y = \dfrac{1}{x^2}$ ですから，$x = 0$ の近くでは必ず ∞ になる。したがって $x = 0$ のときの値は存在しないのですが極限としては ∞ になります。table set の start を -1 にし，きざみを 0.01 くらいにして，table をみれば明らかです。

次に $y = x^{-3}$ のグラフを考えています。これは $y = \dfrac{1}{x^3}$ です。このグラフを描かせてみれば彼の主張は明らかでしょう。

さらに $y = x^{\frac{-1}{2}}$ のグラフですが，これは $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ です。これと $y = \sqrt{x}$ の 2 つのグラフを同時に描かせてみると面白いでしょう。いずれのグラフも $x < 0$ の範囲では虚数になるので，グラフはありません。table を見ると，$x = 0$ のときに大きな違いが見られます。このグラフから見て，彼の主張は正しいでしょう。

以下 $y = x^{-\frac{1}{3}}$ と $y = x^{\frac{1}{3}}$ のグラフも描いてみることをおすすめします。

これらのことから $y = x^0$ のグラフでは $x = 0$ の近くはすべて 1 ですから, 極限値としては 1 と表示するので当然ですね。

以上のことから，数学 III で学習する極限値の定義がはっきりと理解できます。

定義　　関数 $y = f(x)$ において x を限りなく 0 に近づけるとき，その近づけ方は 2 通りある。

1 つは正の方から 0 に近づける方法で，もう 1 つは負の方から近づける方法である。

この 2 つの近づけ方のどちらの方法も同じ値に近づくとき，その値を 0 に近づけたときの極限値という。

記号では $\lim_{x \to 0} f(x) = \alpha$ と書く。

これは $\lim_{x \to +0} = \alpha$ かつ $\lim_{x - 0} = \alpha$ の両方が成り立つときだけである。ただし α は定数や ∞ も含めて考えることとする。

指数表示と指数関数

授業で指数関数を学んだ。指数について考察してみよう。

Activity

a^x の a と x に色々な数値を代入して、その値を調べよう。$a > 0$ や x が実数などにこだわらず，何でも入れてみよう。面白いことがわかるかも知れません。
なお小数の近似値を求めたいときには、DAIAMONDO, ENTER を押せばよい。
また，虚数を扱う場合は，mode で角度は必ず radian にすること。

Activity

2 つの関数 $y = x^2$ と $y = a^x$ のグラフの交点の個数を調べよ。おそらく a の値によって変化すると思われるが、そのことを中心に考察せよ。できれば，2 つのグラフが接するのは a がどのような値のときであるかを調べると面白いでしょう。

Activity

古代の遺跡から出土した木造建築物や木造の容器などがいつ頃作られたものであるかを、調べる方法に「炭素 14 年代測定法」というのがある。これは放射性炭素 C14 は宇宙線中性子と N14 との核反応で生成し、地域的にも経年的にもほぼ一定の濃度で大気中の炭酸ガスに含まれている。生物体の有機物中にもほとんど同じ濃度で含まれているが、生物が死ぬと生物体への新たな C14 の供給が途絶えるので、C14 の量は時間と共にその半減期にしたがって減少する。この減少量から年代を求めることができるのである。C14 の半減期は 5730 年である。現在の空気中の C14 の濃度が 1 %であり、遺跡から出土した古い建築物の柱の組成中の C14 の濃度が 0.77 %であったとき、この木造の柱は今から何年前に山から切り出された木材であると推定されるか。計算手順と、その結果をまとめよ。

Activity

指数や指数関数に何することなら何でもよろしい。自分で問題設定をして探究しましょう。

4 レポート紹介

渡辺君 授業で $\log_{10} 2$ の近似値の出し方を聞いた。それは　2^n をづっと計算していき,10^a に近い数を見つけだせばよいというものだった。

だから近似値を出してみよう。

機械でひたすら 2 をかけていけば良いのだが，×2 とうち続けるのは面倒。そこで次の方法を使う。

[**1**] まず 2 をうつ。次に何も打っていない状態で ×2 とうつ。すると ans(1)×2 とでるのでそれで enter。ans(1) とは最後に計算させた結果なので後はひたすら enter をうてばよい。

[**2**] それでは時間がかかるという人には，機械に $2^x = 10^a$ とし，a にいろいろな数値を入れて x が整数に近ければいいというものがある。（ただしこの方法は人力ではできないと思う。機械があるなら別に近似値をだす必要はない）
（注）書き間違いだと思う。おそらく $solve 2^x = 10^a$ で a にいろいろな数値を入れて x を求めさせるつもりだろう。

この方法で 2^{2000} までだした結果，$\log_{10} 2$ に近い数は

- 3 位　$\dfrac{438}{1455}$ 差 0.0000009321713
- 2 位　$\dfrac{351}{1166}$ 差 0.000000836144
- 1 位　$\dfrac{497}{1651}$ 差 0.000000316682
- $\dfrac{643}{2136}$ 差 0.000000033117
- $\dfrac{789}{2621}$ 差 0.000000145504
- $\dfrac{935}{3106}$ 差 0.000000268341

機械ではこれ以上は無理。一番近いのは $\dfrac{643}{2136}$ であった。

先生からの一言

非常に近い近似値がでましたね。ところでこれは何に近いのでしょう。君が考えている $\log_{10} 2$ の値だって近似値なのですよ。もう一つ質問 2^{1455} は 439 桁になるというのは，画面の桁数を数えたのですか?それともこれも何か楽な方法があるのですか?いずれにしろ，より近い近似を探そうとする努力は数学の本質を探究する上でとてもよい心がけです。

宇佐美君 $y = 2^x$ のグラフを観ていたら，接線が引きたくなったので，今までの知識でいろいろ方程式を立てたがうまくいかない。

そこで教科書を読んでいると微分法のところでなにやら「微分係数と接線の傾き」とそれらしいものがあったので試しに傾き 1 の接線を引いてみようとした。

$\lim_{x \to 0} \dfrac{2^{x+k} - 2^k}{x} = 1$ の k を求めると $y = 2^x$ と傾きが 1 の接線との交点の座標 $(k.2^k)$ が判るので，機械にやらせると $k = \frac{-ln(ln2)}{ln2}$ ....① と訳の判らないのがでた。

$ln2$ の近似値は $0.69314\cdots$ となるので $\sqrt{2}$ みたいな何かの無理数だろうと思い，とりあえず接線の方程式をたてることにした。

傾き 1 で点 $(k, 2^k)$ を通るので，$y - 2^k = 1(x - k)$ より $y = x - k + 2^k$ この k に①を代入すると見事に接する直線が示された。

様々な傾きの接線を作っているうちに，もしかしたら $y = 2^x$ だから，傾き 1 と 2，4 と $\frac{1}{2}$，8 と $\frac{1}{4}$ の接線の交点は一直線上に並ぶのではないかと直感的に思った。（傾きの積が 2 本の接線の交点）

それで交点を出そうとすると，傾き 1，2 の接線の交点が $\left(-\frac{ln(ln2)-2ln2+1}{ln2}, 2\right)$ と x 座標は訳の分からないのが出てきたのに，y 座標はきれいな数字となった。

結局，交点は一直線上に並ばなかった。

接線の交点で一直線上に並びそうなのはなかったので，いかにもバランスのよい 2^n，$\frac{1}{2^n}$ の交点の軌跡を求めようと思った。

n	傾き	傾き	交点の x 座標	交点の y 座標
1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3ln(ln2)-5ln2+3}{3ln2}$	$\frac{5}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{15ln(ln2)-34ln2+15}{15ln2}$	$\frac{17}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$	$-\frac{21ln(ln2)-65ln2+21}{21ln2}$	$\frac{65}{8}$

これで，n　番目の式が表せれば，軌跡がわかるのでそれぞれの数字に着目して（苦心の末）求めると

n	傾き	傾き	交点の x 座標	交点の y 座標
n	2^n	$\frac{1}{2^n}$	$-\frac{(2^{2n}-1)ln(ln2)-n(2^{2n}+1)ln2+(2^{2n}-1)}{(2^{2n}-1)ln2}$	$\frac{n2^{n+1}}{2^{2n}-1}$

（この n には $\frac{1}{2}$ や $\sqrt{2}$ を代入しても成り立つことは確認したのでおそらくグラフは描ける。軌跡の交点の座標を (X, Y) とすると $\begin{cases} X = -\frac{(2^{2n}-1)ln(ln2)-n(2^{2n}+1)ln2+(2^{2n}-1)}{(2^{2n}-1)ln2} \\ Y = \frac{n2^{n+1}}{2^{2n}-1} \end{cases}$

これを Y についての式にしようと思ったができなかった。パラメータのグラフとなる。

これで何とか軌跡は求められた。しかし y 座標はともかく，x 座標の式は $ln2$ のなんとかでものすごく複雑である。

そこで $y = a^x$ の a にいろいろな数を入れて試していると $a = e$ のときには（$e = 2.71828\cdots$）ln 何とかは出てこなくなった。

そこで傾きが e^n と $\frac{1}{e^n}$ の交点の軌跡を求めると

$\begin{cases} X = \frac{(n-1)e^{2n}+(n+1)}{e^{2n}-1} \\ Y = \frac{2ne^n}{e^{2n}-1} \end{cases}$ とさっきのに比べるとかなりあっさりとした式となった。これもパラメータでしかできなかった）

ln なんとかがなくなったのを不思議に思い，lne の近似値を求めると 1 であった。

$\boxed{\text{感想}}$ 今回のレポートではこれといった結論は何も出なかった。しかし，何かをしようとしたとき，数学のいろいろな分野の知識を使うことを実感した。今回のについて言えば，e と $\ln$ についての知識はないが，特に e についてはものすごい数であることはわかった。この前借してもらった「オイラーの贈り物」という本には e も $\ln$ ものっていたので，これから少しずつ勉強していきたい。

今回のレポートを書くのに使ったと思われる数学の知識は「軌跡，微分，$y-y_1=m(x-x_1)$ パラメータ，数列，指数関数である。

$\boxed{\text{余談}}$ $y=2^x$ に対する傾き 2^2 ，$\frac{1}{2^n}$ の接線の交点の軌跡はきれいな式になると思っていたが，きれいにならなかったので少しがっかりしたことは事実である。他に $y=e^x$ に対する傾き 1 の接線が $y=x+1$ となることは面白いと思った。

先生からの一言

このレポートには，新しいことを考えるときのヒントがたくさん隠れています。自分で興味を持ったことがらに対しては，自分でいろいろなことを調べ，試行錯誤を繰り返して，粘り強くチャレンジすることが大切ですね。ここで流した汗は，きっとこの先のどこかで花開くでしょう。すばらしい挑戦でした。