グラフ電卓を使った授業報告
中学・高校生の発見

清風高等学校　公庄　庸三

2005-10-14

1　二項定理

この部分の授業の中で，中学 2 年生の思考の柔軟性というか，発想の豊かさというかとにかくすばらしい出来事が起こったのでそれを紹介する．

まず，授業の流れを箇条書きにすると

[**1**] 「展開」とは何か？

[**2**] 展開をするときのもっとも重要な考えは「分配法則」であることの確認．

[**3**] 分配法則を小学生がわかるように説明するにはどうするか？という発問．

[**4**] 教科書で $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を習ったことを確認する．

[**5**] $(a+b)^3$ の展開を手計算で行わせる．結果は $a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$ と $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ に意見が分かれた．これらは同じであることの確認と，どちらの結果が「美しいか」を議論する．

[**6**] $(a+b)^4$ と $(a+b)^5$ の展開を手計算でさせる．

[**7**] technology で展開するときの方法を説明．つまり $expand((a+b)^n|n=?)$ を説明する．

[**8**] technology を使って $n = 6, 7, 8, 9, \cdots$ を計算し，暗算で $(a+b)^{100}$ の展開ができないか考えよう．という問題を出す．

この後で次のような事件が起こった．

係数が左右対称になっており，その係数は上の 2 つの数を足した数である（パスカルの三角形）ことと，a,b の関係つまり a^pb^{n-p} であることは，ほとんどの生徒が見つけた．

そこで,「じゃあ，黒板に答えを書くから，みんなで大きな声で言ってみよう」といい，$a^{100} + 100a^{99}b+$ まで来たが，あとは沈黙．しばらくして「先生最後の方はわかる」という発言があり，最後は $+100ab^{99} + b^{100}$ とみんなで大きな声で言った．

では 3 番目の係数を考えよう．ということにしてしばらくほっておいた．

ある隣同士に並んでいる 2 人の生徒が，びっくりするようなことを言った．

「先生，ちょっとおもしろいよ.」といって次のようなメモを説明してくれた．

$$1\ \ \frac{2}{1}\ \ 2\ \ \frac{1}{2}\ \ 1$$
$$1\ \ \frac{3}{1}\ \ 3\ \ \frac{2}{2}\ \ 3\ \ \frac{1}{3}\ \ 1$$
$$1\ \ \frac{4}{1}\ \ 4\ \ \frac{3}{2}\ \ 6\ \ \frac{2}{3}\ \ 4\ \ \frac{1}{4}\ \ 1$$
$$1\ \ \frac{5}{1}\ \ 5\ \ \frac{4}{2}\ \ 10\ \ \frac{3}{3}\ \ 10\ \ \frac{2}{4}\ \ 5\ \ \frac{1}{5}\ \ 1$$

〇の数字（分数）は赤色で書いてあった．

そのメモの内容を彼らから聞いて，それを黒板に書いて全員に説明した．

〇の中の分数は，例えば $n=4$ の場合ならば，最初の〇は $\dfrac{4}{1}$ であり，その後は，分母の数値を１増やして，分子の数値を１減らした分数を次々に数字の間に書いていくのです．書き終わると，最初の数と（常に１）と最初の〇分数をかけた数が２番目の係数であり，その２番目の係数に２つ目の〇分数をかけた数が３番目の係数で，その３番目の係数に３つ目の〇分数をかけた数が４番目の係数になっているというわけです．

説明を聞き終わった生徒は，他の n についても，ただしいかを検証しだした．いずれも正しいようである．

「これはすばらしい関係を見つけたな．私もこんな関係は知らなかった」とやや興奮気味に述べて,「それではこの関係でさっきの $(a+b)^{100}$ の展開の続きを調べよう.」と発問した．

各自手計算で最初の部分の係数を調べ，それが technology での結果と同じであるのにまたまた驚いた．

$$1\ \ \frac{100}{1}\ \ 100\ \ \frac{99}{2}$$

最初の１はＯＫ．次の係数は 100 だから，１と 100 の間に赤い分数 $\dfrac{100}{1}$ を書く．次の赤い分数は $\dfrac{99}{2}$ だから，3 番目の係数は，$100 \times \dfrac{99}{2} = 50 \times 99 = 4950$, 次の赤い分数は $\dfrac{98}{3}$ だから，4 番目の係数は $4950 \times \dfrac{98}{3} = 161700$ である．

そこで,「ここまできたから，公式を作ろう」公式だからどうする？

「先生文字を使えばいい」という発言があり,「では $(a+b)^n$ の展開の公式を作れ」と指示してしばらくほっておいた．

できあがった係数を発表させると次のようであった．

$$1,\quad n,\quad \frac{n(n-1)}{2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{6},\quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24},\quad \cdots$$

「よし，これでいいか？」と聞くと,「分子は覚えられるが，分母は覚えられない」という意見が出されたので,「よし，分母を覚えられるような何か考えはないか？」と聞いた.

しばらくして,「1,　1×2,　$1\times 2\times 3$,　$1\times 2\times 3\times 4$ だ」という意見がだされた.

これなら覚えられるということになって,「太田・開徳の定理」が完成した.

$(a+b)^n$ の展開は

$a^n+na^{n-1}b+\dfrac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}a^{n-3}b^3+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^{n-4}b^4+\cdots$

すばらしい発見で，二項定理が完成したのでこれで授業を終わろうかと思ったが，ついでだから，以下のようにして終わった.

「ここまで来たら１つ便利な記号を教えてあげよう.」

$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9$ と書くのは手が疲れるだろ？そこで数学者はおもしろい記号を作ったのだ.

$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9$ を 9! と書くのだ．黒板に階乗の記号を大きく書くと,「先生それは英語の記号だ」と発言あり.「そうだ，どんなときに使う記号だ？」「感嘆文」「びっくり文」という発言あり.

数学者はわけのわからん難しい記号をたくさん作るが，この記号は「気持ちがよくでているぞ．試しに 20! を計算してみよ.」

生徒は一斉に technology で計算をし始め，一番早い生徒が「できた．2432902008176640000 です.」他の生徒もしばらくして完成.

「君ら，もし 100! 計算しろと言われたらほんとに計算するか？」

「いやや，数字を押すだけで疲れる」

「よし，最後にもう一つ．このびっくり記号はこの機械にあるのだ．100 を入力して，そのあとで $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{W}}$ を押せ.」

「わあああ．びっくりがでた.」「あとは enter ですか？」「そうだ」「わあああ，すごい数字だ」

「よし，この記号はなぜびっくりにしたのかわかったな？」「はい」

「よし，きょうは終わり」

2　ピタゴラス数

$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数をいろいろ探そう．

手で計算するもの，technology で調べるものなどいろいろあり．

見つかった数値をその都度黒板に板書していく．

$3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$, $8^2+6^2=10^2$,$7^2+24^2=25^2$, $12^2+16^2=20^2$, $40^2+9^2=41^2$, $45^2+28^2=53^2$, $20^2+21^2=29^2$, $\cdots$

しばらくして，前の方で3人が一緒になって探していたグループが「先生，どんな大きな数でもいいから１つ奇数を言ってください．僕らはその数を使ってすぐにピタゴラス数を見つけることができると思います」と言った．

そこで適当に大きな奇数を１つ言ってやった．例えば1234567と言ったとしよう．

彼らはtechnologyで何かを計算し，ほんの数秒の後に，$(762077838744)^2+(1234567)^2=(762077838745)^2$ です．と答えた．その数値を彼らの言うとおりに黒板に書くと，他の生徒が検算し始めた．

みんな「本当だ」と驚いたのできっと正しいのだろう．

彼らにどうして見つけたのかを聞いた．

省略

そこで，それを数学で証明してみよ．という課題に変えた．

見事に証明も完成した．

$(2n^2-2n)^2+(2n-1)^2=(2n^2-2n+1)^2$

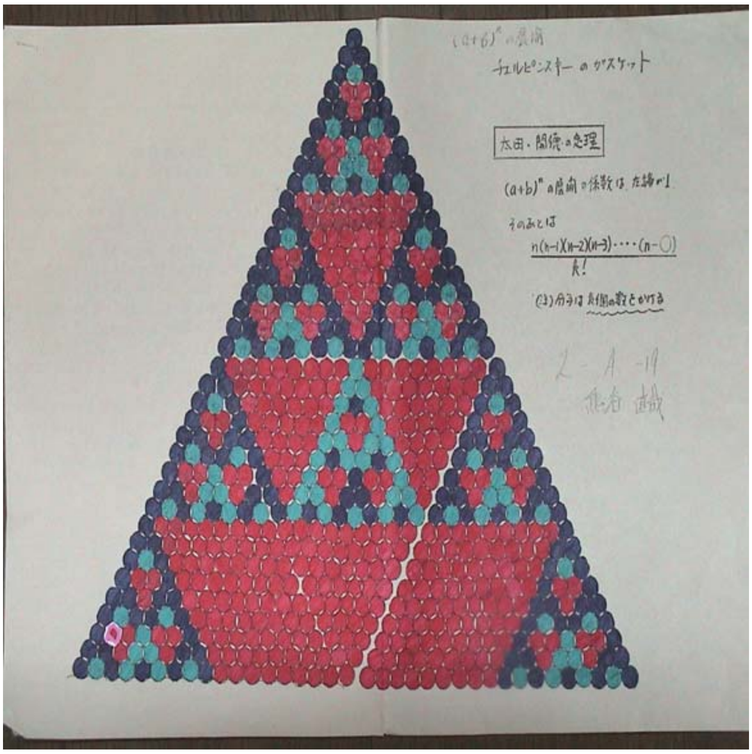
平成11年度北海道大学後期理・工学部入試問題 [3]

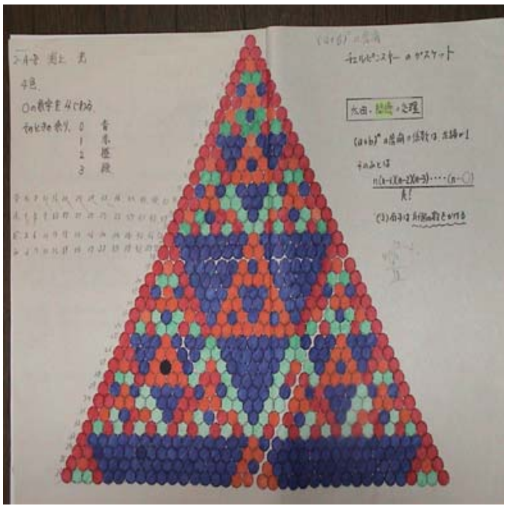
3辺の長さがいずれも整数値であるような直角三角形を考える．

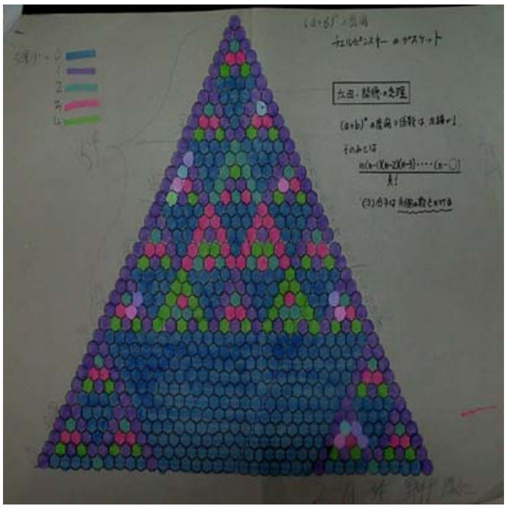
[**1**] 直角を挟む2辺の長さのうち，少なくとも一方は偶数であることを証明せよ．

[**2**] 斜辺の長さと2番目に長い辺の長さの差が1であるような例を3,4,5以外に３つ挙げよ．

3　チェルピンスキーのガスケット







熊谷直哉 彼は，$(a+b)^n$ の展開において，係数を 3 で割った際の余りで 3 色に色分けした．1 余るのは青，2 余るのは水色，割り切れるのは赤に設定した．

次の 4 つのことを発見した．

[**1**] すべて規則的に並んでいる．

[**2**] 赤色の三角形がたくさんある．とくに 4 個は（1 つは途中まで）とても大きな三角形になった．

[**3**] 赤の三角形以外に，2辺が青だけでできている三角形が8個あるはずなのですが，真ん中のだけが違う．

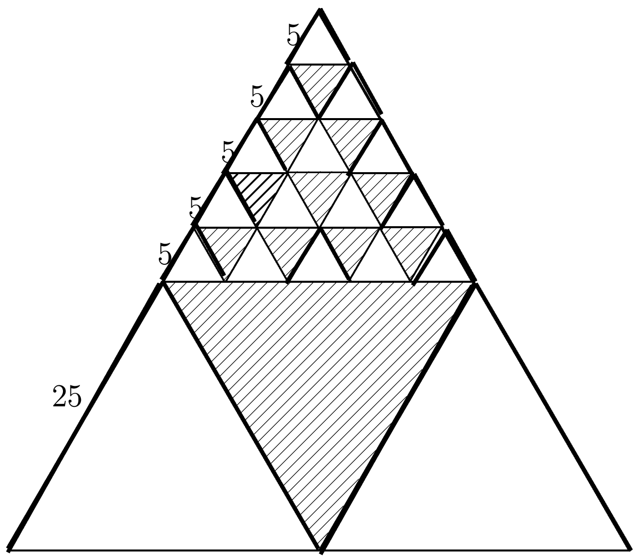
[**4**] その1つだけ違う三角形は残りの三角形の「青」と「水色」を入れ替えただけです．

疑問点が2つある．

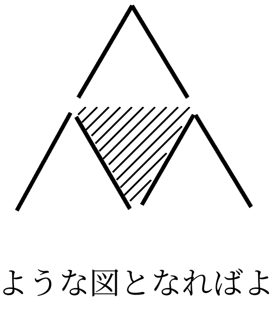
[**1**] なぜ一番したの赤い三角形だけが大きいのだろう？

[**2**] 上の発見の [3] で，なぜ1つだけ配置が違うのか？

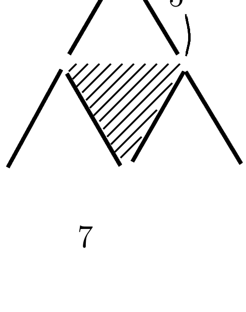
平原　健太 彼は5色に塗った．できあがった図を眺めて次のことに気がついた．図の重要な部分だけを書くと図1になる．



この図で注目するべき図形は，大小に関係なく次の図形です．



このような図形になるには次のような図となればよい．



そうすれば，必ずこれを拡大した図はこのピラミッドの中に必ず入っていることになる.（表現はちょっと違うが内原君もこのように全体を大きくみて規則がありそうだと書いていた）

謝　有貴 3 色の色を使ってした．上から順に数字を書いていって最初に気がついたのは数字が左右対称になることだ．これで能率がよくなり，進む早さは約 2 倍になった．約というのはもし完全に左右対称ならいらないのだが，右から（左でもよい）2 番目の数字が偶数である場合は中央の値も求めなくてはならないので完全に能率が 2 倍にはならない.

途中省略

計算したといっても，5 桁や 6 桁の数字を足したのではなく，その余りを足していった.（最初からそうやればよかった）すると $0+0=$,$1+1=2$,$0+1=1$,$0+2=2$,$1+2=3=0$,$3+2=4=1$（色ではなくこのような数字の計算で書いていたのは謝君と今西君だけでした）となり，色だけで答えが決まる.

南山　将 3 で割って余りが 1 を緑，余りが 2 を青，割り切れるのを橙で色塗りをした.

橙色は「単独では存在せず，必ず 3 つ以上で正三角形を形成し，それぞれがひっついていない．その三角形の上には緑と青が交互に並んでいる.

まず，緑と青で橙になる証明

緑を $3m+1$, 青を $3n+2$ とおくと（m,n は整数）その和は $(3m+1)+(3n+2)=3m+3n+3=3(m+n+1)$．ここで $m+n+1$ は整数より，$3(m+n+1)$ は 3 の倍数．よって緑と青で橙になる.

橙が正三角形になり，それぞれがひっつかない証明 2 つの 3 の倍数の和は 3 の倍数になることと，その周りが 3 の倍数にならないことを言えばよい．彼はこれをやはり文字式で証明している.（省略）

野村隆仁 彼は，$(a+b)^n$ の展開において，係数を 5 で割った際の余りで 5 色に色分けした．最初は，丸の中に係数を入れていたが，途中から数字が大きくなって，円内に納まらなくなるので，下 1 桁だけを書き込んで行った.

完成したガスケットを見て気づいたこと

[**1**] 25 段目までが一つの周期になると判った.

[**2**] 6段目から9段目まで余り0で作られた逆三角形が出てくる．11段目からも同じ物が出てきて2個になり，16段目になると3個，21段目になると4個，そして26段目からは1辺24個の円でできる正三角形ができる．そしてまた小さいのが現れる．

[**3**] 1辺25の正三角形の中だけをみても，同じ三角形がたくさん規則的に並んでいる．

[**4**] 特に26段目にある，余り0の丸が続く直線はびっくりした．これが周期の分かれ目だろう．

[**5**] 25という数字は5の2乗だ．だからもし4でやっていたら16，6だったら36になるのではないかと推測した．(これは小川拓也君も見つけた)

こんな色塗りに「規則性」はないと思っていた僕ですが，こういう形で規則性を発見できるとはびっくり仰天しました．数学はいろいろな方式や公式が必ずあるではないだろうか．僕はこういうのを説明するが下手ですが自分ではがんばった．

浦上光 彼は，$(a+b)^n$ の展開において，係数を4で割った際の余りで4色に色分けした．

係数を丸の中に記入しないで，次のような色分け表を作って塗っていった．

余り0は青，余り1は赤，余り2は橙，余り3は緑とし，

青＋赤＝赤，青＋橙＝橙，青＋緑＝緑

赤＋橙＝緑，赤＋緑＝青

橙＋緑＝赤(このような色の規則を見つけた人はたくさんいた．しかし文字式を使って証明をしていた人は浦上君と南山君だけでした)

このことは次のように証明できる．

4で割って0余る数（青）は $4a$，4で割って1余る数（赤）は $4a+1$，4で割って2余る数（橙）は $4a+2$，4で割って3余る数（緑）は $4a+3$ とする．(a は自然数)

青＋赤=$4a+(4a+1)=8a+1$ で $8a$ は4の倍数だから，これは余り1（赤）

青＋橙=$4a+(4a+2)=8a+2$ で $8a$ は4の倍数だから，これは余り2（橙）

途中省略

赤＋緑=$(4a+1)+(4a+3)=8a+4=4(2a+1)$.$a$ は自然数なので，これは4の倍数で余りは0（青）

橙＋緑$=(4a+2)+(4a+3)=8a+5=4(2a+1)+1.4(2a+1)$ は４の倍数なので，橙＋緑の余りは１（赤）

よってこのことより,「三角形の頂点の色が赤だと判れば，式を展開しなくてもすべての丸の色がわかる.」

できた三角形の色の並びは「斜めに見ると」規則がある.（これは藤本雄大君も見つけていた）

2 段目は上から「赤，橙，緑，青」の周期で並んでいる.

3 段目は上から「赤，緑，橙，橙，緑，赤，青，青」

4 段目は上から「赤，青，橙，青，緑，青，青，青」

5 段目は上から「赤，赤，緑，緑，橙，橙，橙，橙，緑，緑，赤，赤，青，青，青，青」

6 段目は上から「赤，橙，赤，青，橙，青，橙，青，緑，橙，緑，青，青，青，青，青」

このようにして，斜めの基本セットを取り出すと，

「n 段目の，右から $n-1$ 個は必ず青色になっている.」

荒川宗徳 ４で割った余りで色を塗っていく．余り０は赤，余り１は青，余り２は黄色，余り３は緑.（途中省略）

色＋色の発想で表を作れば数字の計算をしなくてもよい.

表 1:

	赤	青	黄	緑
赤	赤	青	黄	緑
青	青	黄	緑	赤
黄	黄	緑	赤	青
緑	緑	赤	青	黄

このような表を書いたのは荒川君だけでした.

4　7で割ったときの余り

7で割ったときの余りについて，次のようなレポートを書いた生徒がいます.

7桁の整数 $abcdefg$ を7で割ったとき

$$
\begin{aligned}
&a \times 1000000 + b \times 100000 + c \times 10000 + d \times 1000 + e \times 100 + f \times 10 + g \\
&= (999992a + 99995b + 9996c + 994d + 98e + 7f) + 8a + 5b + 4c + 6d + 2e + 3f + g \\
&= 7(\cdots a + \cdots b + \cdots c + \cdots d + \cdots e + f) + 8a + 5b + 4c + 6d + 2e + 3f + g
\end{aligned}
$$

上の式を7で割ると余りは $8a + 5b + 4c + 6d + 2e + 3f + g$ となる.

$8a + 5b + 4c + 6d + 2e + 3f + g = 7(a + b + c + d) + a + 2e + 3f + g - 2b - 3c - d$

この式をさらに7で割ると余りは $a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g$ となる.

この場合係数は $1, -2, -3, -1, 2, 3, 1$ となった.

9桁の整数 $pqrstuvwx$ を7で割ったとき

$$
\begin{aligned}
&p \times 100000000 + q \times 10000000 + r \times 1000000 + s \times 100000 + t \times 10000 \\
&+ u \times 1000 + v \times 100 + w \times 10 + x \\
&= 7(14285714p + 1428574q + 142857r + 14285s + 1428t + 142u + 14v + w) \\
&+ 2p + 3q + r + 5s + 4t + 6u + 2v + 3w + x
\end{aligned}
$$

上の式を7で割ると余りは $2p + 3q + r + 5s + 4t + 6u + 2v + 3w + x$ となる.

$2p+3q+r+5s+4t+6u+2v+3w+x = 2p+3q+r+7(s+t+u)-2s-3t-u+2v+3w+x$

この式をさらに7で割ると余りは $2p + 3q + r - 2s - 3t - u + 2v + 3w + x$ となる.

この場合係数は $2, 3, 1, -2, -3, -1, 2, 3, 1$ となった.

この2つの結果を比べてみると右から見ると $1, 3, 2, -1, -3, -2$ と並んでいることがわかった.

よって $a + b \times 10 + c \times 100 + d \times 1000 + e \times 10000 + \cdots$ という数を7で割ったときのあまりの算出方法は

$a + 3b + 2c - d - 3e - 2f + g + 3h + 2i - \cdots$ となる.

(あっているかなあ～???)

例えば1234567876543をこの方法で調べると余りは1である．実際に計算するとあっていた.

このレポートは7の倍数を眺めていただけでは思いつきません．しかし3で割ったときの余りや9で割ったときのあまりの調べ方を参考にして，7の倍数の中で 10^n に近い数をtechnologyで調べることによって考えついたと思われます.

5　因数分解

$x^n - 1$　ただし $n = 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\cdots$ の因数分解を行い、その結果について、何か発見があればそれを発表しよう。

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ……………… ①
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ ……………… ②
$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ ……………… ③
$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ ……………… ④
$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ ……………… ⑤
$x^7 - 1 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ ……………… ⑥
$x^8 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ ……………… ⑦
$x^9 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ ……………… ⑧
$x^{10} - 1 = (x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ ……………… ⑨
$x^{11} - 1 = (x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
……………… ⑩
$x^{12} - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$ ……………… ⑪
$x^{13} - 1 = (x-1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
……………… ⑫

———生徒の発見した事柄——-

[**1**] n が素数のときは、必ず括弧は 2 つである。

[**2**] 一番最初には必ず $(x-1)$ がある。

[**3**] n が素数の場合、$(x-1)$ にかける片方の括弧の x の最初の乗数は $n-1$ であり、後は $n-2$,$n-3$ と乗数が減る。最後に定数項 1 が必ずくる。

[**4**] n に、素数の倍数を代入すると、その素数を代入したときの因数分解の答えの $(x-1)$ にかかるもう片方の因数が必ずくる。

[**5**] n が偶数のときには、$(x-1)(x+1)$ が必ずある。

[**6**] n が 3 の倍数のときは、$(x-1)(x^2+x+1)$ が必ずある。

[**7**] n が素数のときは、$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x^2+x+1)$ に必ずなる。

[**8**] n が 4 の倍数のときは、$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ が必ずある。

[**9**] n が 5 の倍数のときは、$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ が必ずある。

[10] n が 6 の倍数のときは、(x^2-x+1) も必ずある。

[11] $x^n-1=(x-1)(\sum_{k=0}^{n-1}x^k)$ である。

[12] $x^{3^n}-1=(x-1)(x^2+x+1)\cdots(x^a+x^b+1^c)$ とすると、

$x^{3^{n+1}}-1=(x-1)(x^2+x+1)\cdots(x^a+x^b+1^c)(x^{3a}+x^{3b}+1^{3c})$ になる。

[13] 括弧内に $-$ の符号があるときは、$-,+,-,+$ という順番になる。

[14] $x^{4n+2}-1$ のときは、符号を気にしなければ、同じ形のものが 2 組づつある。

[15] $x^{2^n}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\cdots(x^{2^{n-1}}+1)$ になる。

[16] この機械では $x^{65535}-1$ までしか因数分解できない。

[17] x^n-1 の因数分解で $(x-1)$ 以外のすべての項を展開すると、すべて $(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x^2+x+1)$ になったので、必ず $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x^2+x+1)$ になる。

[18] $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x^2+x+1)$ 　を証明する。

右辺 $=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-1$

$=x^n-1=$ 左辺

[19] $x^{2n}-1=(x^n-1)(x^n+1)$

[20] $x^{3n}-1=(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)$

[21] n が何かの倍数のとき、同じ括弧がある。

[22] n が素数のとき、$(x-1)$ の後ろの括弧の中がきれい。

[23] $x^{6\cdot 3^{n-1}}-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\cdots(x^{6\cdot 3^{n-2}}+x^{3\cdot 3^{n-2}}+1)(x^{6\cdot 3^{n-2}}-x^{3\cdot 3^{n-2}}+1)$

[24] p が素数のとき、$x^{2p}-1=(x-1)(x+1)\cdots(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1)(x^{p-1}-x^{p-2}+\cdots+1)$

[25] n の約数を m とするとき、x^n-1 の因数分解の因数には、x^m-1 の因数分解と同じものが含まれている。

[26] x^n-1 の因数分解の各因数の最初の乗数の和は n に等しい。

[27] x^n-1 の因数分解の一番乗数の大きい因数を見ると、n が 2、4、8、16 となるにつれて 1、2、4、8 となる。また n が 3、9、27 となるにつれて 2、6、18 となる。

[28] x^n-1 で $n=\boxed{3}$ から、n を$\boxed{3}$倍するにつれ、今までの値に括弧が 1 つづつ増えていき、1 つ前の括弧から、各値が$\boxed{3}$ 乗したものが増えた。またこれは $(x-1)$ 以外すべての括弧の中に$\boxed{3}$項ずつ入っている。ちなみに $n=\boxed{2}$ からだと、$\boxed{2}$倍していくにつれ、$\boxed{2}$乗したものが増え、括弧の中に$\boxed{2}$つずつ入っている。この法則は n が素数のときに成り立つ。

[29] すべて $x-1$ で割りきれる。

[30] n が偶数のとき $(x-1)(x+1)$　で割りきれる。

[31] $n=p^m$ (p が素数）のときは規則的な形になる。その規則は

(a) $(x-1)$ の後ろの括弧は m 個

(b) $(x-1)$ の後ろの括弧の中は p 個

(c) $(x-1)$ の後ろの括弧はその前の括弧のそれぞれの数を p 倍したものが入る

[32] 括弧の数は n の約数の個数と同じである.

6　柊の葉っぱ（屋代君のレポート）

教科書でサイクロイドが終わった。このあと円を使って内サイクロイドや外サイクロイドのパラメータ表示を課題として遊んだ。さらにできた式を少し変化させて,「夜店で売っているサイクロイドのおもちゃ」のような図形を楽しんだ。

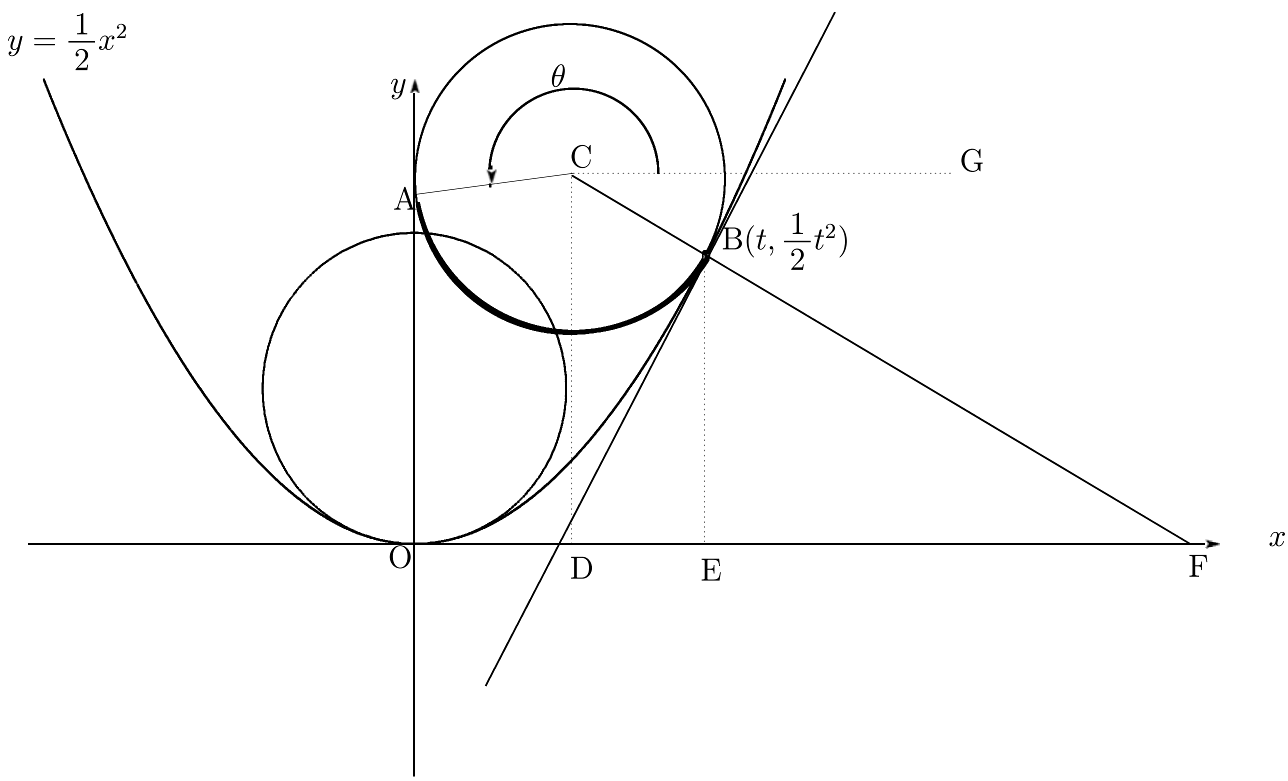
その後数日して，屋代君が「先生 $\tan\theta = t$ って解けますか？」と聞きに来た。$\tan\theta = \sqrt{3}$ は解けるだろ？」「違うのです。$\tan\theta = t$ が解きたいのです。」

「解けるよ。technology に $\tan^{-1}$ というキーがあるだろう。教科書で f^{-1} の意味を勉強したはずだ。それと同じだよ」「そうですか。わかりました」

これだけの問答であった。私としては彼が何をしているのか全く見当がつかなかった。

数日後，彼の提出したレポートはこの「柊の葉っぱ」であった。

まだ，数学 III の積分の道のりは学習していない。しかし，$\tan^{-1} t$ 以外に,道のりの公式と $\int \sqrt{1+t^2}dx$ の積分計算が必要である。彼はどこかに書いてあるだろうと思って，教科書をどんどんめくっていき，道のりの公式を見つけた。後は technology で $\tan^{-1} t$ と積分を計算して，下のようなパラメータ表示を作ったのである。



図のように放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の中を半径 1 の円が転がるとき，円上の 1 点の描く軌跡を調べる。

点 B における接線の方程式は，$f'(x)=x$ より

$y=tx-\dfrac{1}{2}t^2$

従って直線 BC の方程式は $y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{1}{2}t^2+1$

よって点 F の座標は，$(\dfrac{1}{2}t^3+1,0)$ となる。

$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{FBE}=\alpha$ とすると，$\tan\alpha=t$

従って $\alpha=\tan^{-1}t$

また，$\beta=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\int_0^t\sqrt{1+x^2}dx$ より

$\theta+\overset{\frown}{\mathrm{AB}}-\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$

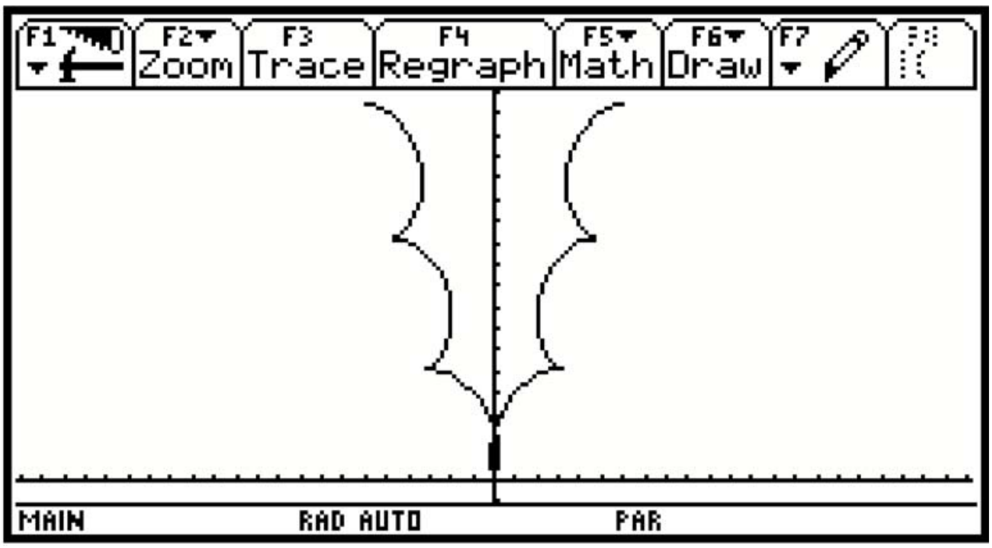
以上により，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\=&(t,\frac{1}{2}t^2)-\Big(\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha),\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha\Big)+(\cos\beta,\sin\beta)\end{aligned}$$

グラフ電卓で $\int_0^t\sqrt{1+x^2}dx$ と $\tan^{-1}t$ を求めて，つぎのようなパラメータ表示を得る。

$$\begin{cases}x=t-\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\tan^{-1}t)+\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\log\left|\sqrt{1+t^2}+t\right|}{2}-\dfrac{t\sqrt{t^2+1}}{2}+\tan^{-1}t)\\ y=\dfrac{1}{2}t^2-\sin(\dfrac{3\pi}{2}+\tan^{-1}t)+\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\log\left|\sqrt{1+t^2}+t\right|}{2}-\dfrac{t\sqrt{t^2+1}}{2}+\tan^{-1}t)\end{cases}$$

これを図示すると次のようになる。



7　極を使ってグラフを考える（小路君のレポート）

（注）彼のレポートにはたくさん図がありますが、自分でグラフ電卓を操作して体験するほうが面白いので、ここではあえて図はほとんど省略しました。

まず、楕円を考える。

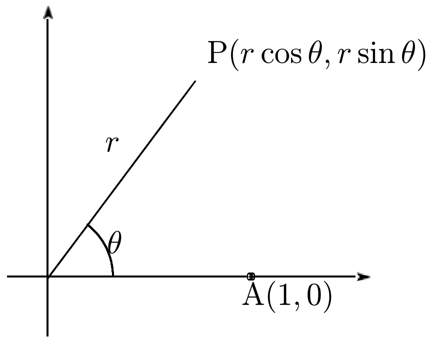
$OP + PA = 2$ とする。

$r + \sqrt{(r\cos\theta - 1)^2 + r^2\sin^2\theta} = 2$

より $r = \dfrac{3}{4 - 2\cos\theta}$ となる。

ここから、拡張して考える。

基本を $r = \dfrac{c}{a - b\cos\theta}$ として、a, b, c, θ をいろいろ変えてみると次のような結果がわかった。



[1] c を変化させると図形の大きさが変わる。

つまり原点からの距離が c 倍になる。（a, b が c で約分されないとき）

[2] a と b の関係を調べると

(a) $|a| = |b|$ ならば放物線

(b) $|a| > |b|$ ならば楕円

(c) $|a| < |b|$ ならば双曲線

[3] θ の値を変える

(a) $\theta \to \theta + \dfrac{\pi}{2}$ にすると $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転する。

(b) $\theta \to n\theta$(n は自然数）変えるのだが、ここでは $r = \dfrac{10}{2 + \cos n\theta}$ を使ってみる。

$(n = 1)$ のとき、楕円

$(n = 2)$ のとき、だるま型

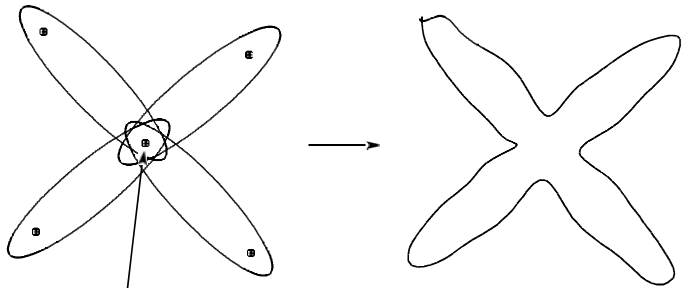
$(n = 3)$ のとき、三脚を上からみた感じ

$(n = 4)$ のとき、

$(n = 5)$ のとき、

これらの結果と自分の推測を加えて結論を作ると、n 個の楕円が 1 つの焦点を共有してでき、その外側がグラフとなる。

たとえば、次の図のような感じ



グラフ電卓でたまごが描きたい

図の ① と ② の楕円をたすと ③ のようなたまごができるだろう。

これを具体的に数字を使って式を作ると (ここでは ② のかわりにだるまを使う)

①:$r = \dfrac{10}{2+\cos\theta}$

②:$r = \dfrac{10}{2+\cos 2\theta}$

これをたすと ③ は

$r = \dfrac{10}{2+\cos\theta} + \dfrac{10}{2+\cos 2\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

これで window を $-30 < x < 30$,$-30 < y < 30$,xscl と yscl はともに 0.1 としてグラフを描かせるとたまご型に見える。

（注）視覚的にはたまご型に見えるが厳密に計算すると違っているかもしれない。

おまけの遊び

[**1**] $r = \dfrac{10}{2+\cos\theta} + \dfrac{10}{2+\cos 3\theta}$

[**2**] $r = \dfrac{10}{2+\cos\theta} + \dfrac{10}{2+\cos 4\theta}$

[**3**] $r = \dfrac{10}{2+\cos\theta} - \dfrac{10}{2+\cos 2\theta}$

極を使った感想 極座標はまわりもの（円とか楕円）をなんとなく扱いやすそうだという印象をうけた。まあ回転が簡単にできるから当然かもしれない。

たまご型について 初めは楕円のように計算して、やっていた。あまりの難解さに挫折気味だったが、風呂に入っているときに、「楕円＋楕円」でできるんじゃないかと思ったので、やってみると、結構簡単にできてしまった。(視覚的にできただけだが)。ちょっと拍子抜けの感じです。

教訓 湯船につかると、ふとしたことに気付くもんだ。

8　グラフアート応募

[**1**] 清風高等学校理数科高校 1 年 B 組

[**2**] 氏名　　古川智啓

[**3**] 題名　　気球

[**4**] 部門　　関数部門 (function 使用)

[**5**] 使用関数　function9 個

$$y1 = \sqrt{\frac{|100 - x^2|}{100 - x^2}} \times \frac{x^2}{7} \times \left(\sqrt{\frac{|x^2 - 9|}{x^2 - 9}}\right)^2 + 10$$

$$y2 = \sqrt{100 - x^2} + \frac{100}{7} + 10$$

$$y3 = \Big(|4x - 10| + |4x + 10|\Big) \times 1.5 \times \sqrt{\frac{|3.1^2 - x^2|}{3.1^2 - x^2}} - 27.157157142857$$

$$y4 = 7.6\sqrt{\frac{|2.93368^2 - x^2|}{2.93368^2 - x^2}}$$

$$y5 = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{|9 - x^2|}{9 - x^2}} \times |(x - 2.93368)(x - 1.5)x(x + 1.5)(x + 2.93368)| + 7.6$$

$$y6 == \sqrt{\frac{|100 - x^2|}{100 - x^2}} \times \frac{x^2}{64} + \frac{166}{7}$$

$$y7 = \sqrt{\frac{\left|x^2 - \left(\frac{-(\sqrt{2652769}-49)}{272}\right)^2\right|}{x^2 - \left(\frac{-(\sqrt{2652769}-49)}{272}\right)^2}} \times \frac{|x + 12|(2x - 17)}{150} + 16$$

$$y8 = \sqrt{25 - (x + 30)^2} + 28$$

$$y9 = -\sqrt{25 - (x + 30)^2} + 28$$

[**6**] style の設定ははすべて line

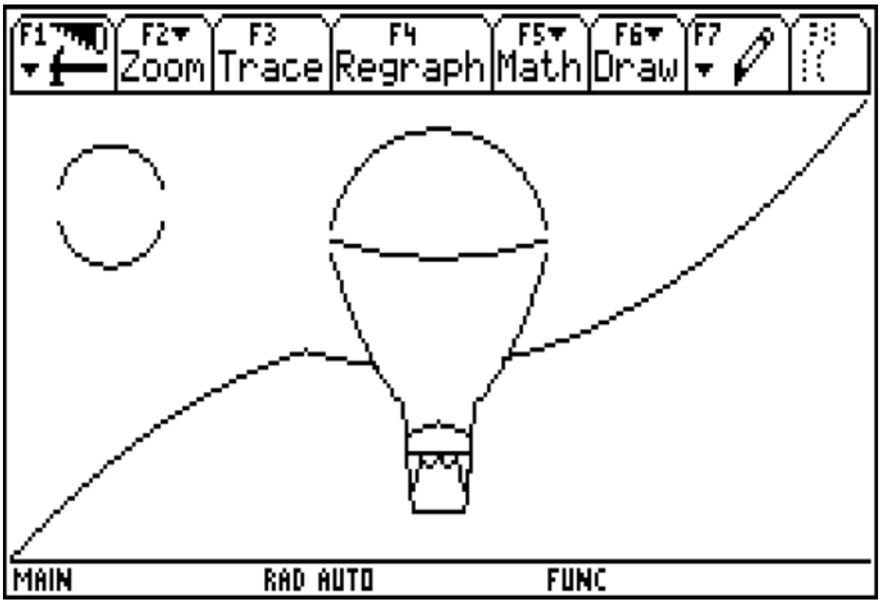
[**7**] 軸は描かない Axes=off

[**8**] graph order は SQE

[**9**] Window の設定

`xmin=-39 , xmax=39,xscl=2 , ymin=-1 , ymax=37 , yscl=2,xres=1`

[**10**] アート


F1
F2
Zoom
F3
Trace
F4
Regraph
F5
Math
F6
Draw
F7
MAIN
RAD AUTO
FUNC

[**1**] 清風高等学校六ヶ年コース高校 1 年 A 組

[**2**] 氏名　　小川拓也

[**3**] 題名　　sunset

[**4**] 部門　　一般部門 (パラメータ使用)

[**5**] 使用関数　parametric

$$\begin{cases} xt1 = \dfrac{3\cos t + 4\pi}{xt50(t)} \\ yt1 = 3\sin t + 3.75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt2 = \dfrac{5t - \frac{\pi}{2}}{yt50(t)} \\ yt2 = 4.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt3 = \dfrac{\dfrac{12t - 12\,[t] - 6}{[t]} + 4\pi}{xt51(t)} \\ yt3 = \dfrac{-t}{3.5} + 4.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt4 = \dfrac{\frac{3}{2}\left|\,\sin\left((t-2.593633)\cos(t-2.593633)\right)\tan(t-2.593633) + 2\cos(t-2.593633) + rand()\right|}{yt51(t)} - 0.8 \\ yt4 = \dfrac{-t}{1.75} + 9.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt5 = \dfrac{t + 5\pi}{xt52(t) + yt52(t)} \\ yt5 = |\,\sin(t)\,| + 8 - \dfrac{t}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt6 = 2.5t \\ yt6 = rand() \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt7 = \dfrac{|\,t - 2\pi\,| + 6\pi + 2}{xt53(t)} \\ yt7 = \left(-\sin(\frac{t}{2}) + \frac{rand()}{3}\right)\left(\dfrac{\frac{|\,t-2\pi-0.2\,|}{t-2\pi-0.2}}{2} + \dfrac{3}{2}\right) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt8 = -\left|4t - \frac{9}{2}\right| + \dfrac{9}{2} \\ yt8 = \dfrac{3}{2}\left(\left|t - \dfrac{9}{8}\right| - |\,t-1\,|\right) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt9 = \dfrac{\frac{t}{4}}{yt53(t)} + 2.5 \\ yt9 = -\left|\frac{3}{2}t - 3\right| + 4.1875 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
xt10 = rand() \cdot 4 \\
yt10 = \dfrac{rand()}{6} + \dfrac{7}{8}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
xt11 = \dfrac{-\left|\frac{t}{8} - 0.4\right| + 0.4 + 2.8}{xt54(t)} \\
yt11 = 0.3\left(1 + (-1)^{\left[\frac{t}{3.2}\right]}\right) + 2.9875
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
xt50 = \dfrac{\frac{|t|}{t} - \frac{|t-\pi|}{t-\pi}}{2} \\
yt50 = \dfrac{\frac{-|t-4.7|}{t-4.7} + 1}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
xt51 = \dfrac{\frac{-|t-9.5|}{t-9.5} + 1}{2} \\
yt51 = \dfrac{\frac{|t|}{t} - \frac{|t-7.91547821|}{t-7.91547821}}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
xt52 = \dfrac{\frac{|t-\pi+0.4|}{t-\pi+0.4} - \frac{|t-\pi-0.5|}{t-\pi-0.5}}{2} \\
yt52 = \dfrac{\frac{|t-2\pi+0.4|}{t-2\pi+0.4} - \frac{|t-2\pi-0.5|}{t-2\pi-0.5}}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
xt53 = \dfrac{\frac{|t+0.1|}{t+0.1} - \frac{|t-4\pi-0.1|}{t-4\pi-0.1}}{2} \\
yt53 = \dfrac{1 - \frac{|t-1.3|}{t-1.3} + \frac{|t-1.5|}{t-1.5} - \frac{|t-2.5|}{t-2.5} + \frac{|t-2.7|}{t-2.7} - \frac{|t-4.1|}{t-4.1}}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
xt54 = \dfrac{\frac{-|t-6.5|}{t-6.5} + 1}{2}
\end{cases}
$$

ただし，実際のグラフ描画では xt50 と yt50 以下の式には check を入れない．

[**6**] style の設定は xt6,yt6,xt10,yt10 は dot でそれ以外はすべて line

[**7**] angle は radian

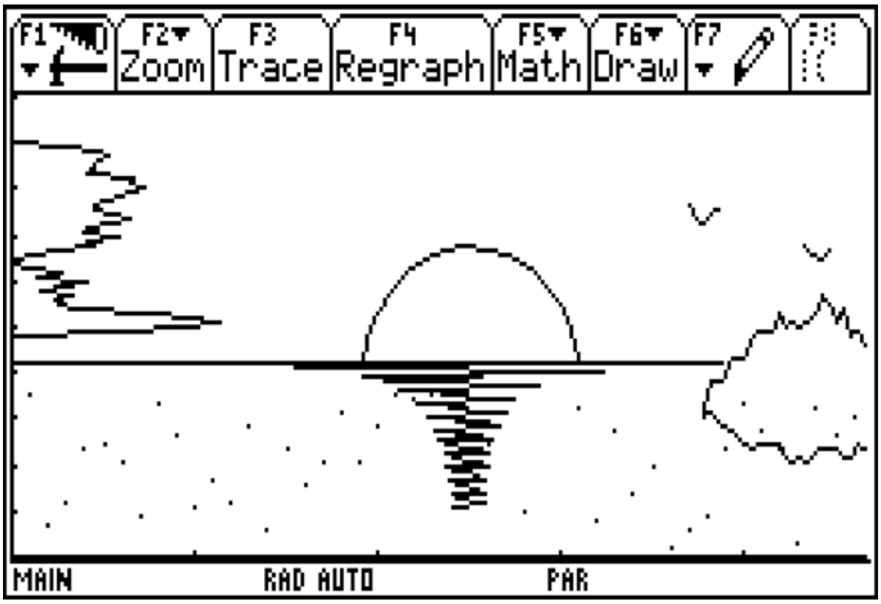
[**8**] graph order は simul

[**9**] Window の設定

`tmin=0,tmax=12,tstep=0.2,xmin=0 , xmax=23.3333333334`

`xscl=5 , ymin=0 , ymax=10 , yscl=1`

[**10**] アート



$\boxed{\text{補足}}$ 空の雲や海の岩の形は，グラフを描く度に変化する．彼が名付けた「スイッチ関数」を随所に使用している．$g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|x|}{x} - \dfrac{|x-3|}{x-3}\right)$ は $0 < x < 3$ のときだけスイッチが on になる．

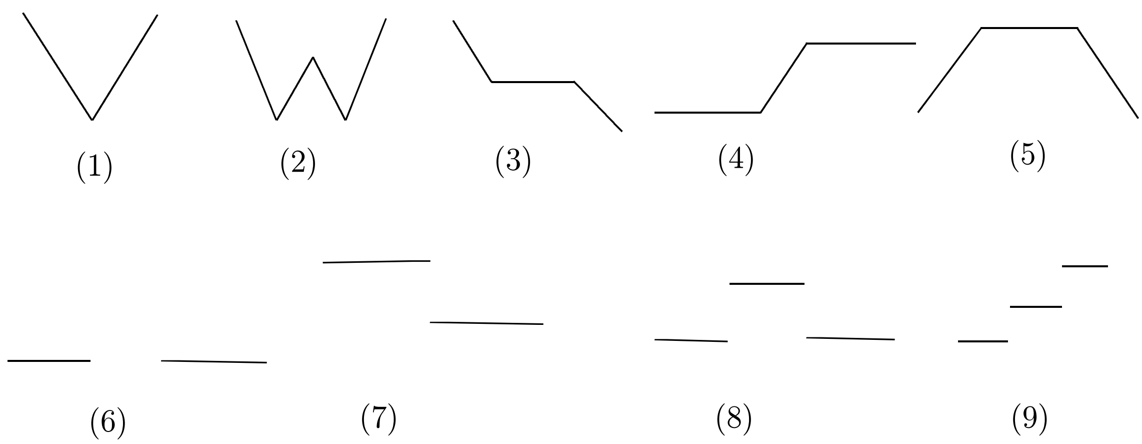
9　絶対値

[1] 関数についての簡単なレクチャー

[2] １次関数のグラフは既知

[3] 絶対値の入力方法を教える．各自数個の関数を使って操作の確認

[4] 黒板に次の図をかく．グラフがこのような形になる絶対値記号を含む関数を作ろう．



[5] (1) は数秒で完成

[6] (2) もすぐに完成

[7] (5) が完成 $|x|+|x-2|$ など

[8] (4) が完成 $|x|-|x-2|$ など

[9] (3) に挑戦するもなかなかできず

[10] そのうちに穴の空いた (6) に興味が移る．

[11] 「先生 $\frac{x}{x}$ は穴が空くはずなのに空いていません.」という質問あり．機械の特性を説明し，table をみる方法を教える.「穴があく」＝分母が 0 になるという発想.

[12] 「穴が空いたが直線にならない」という発言．$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ もちろんこの前に $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を作っていた.「長い区間穴が空く＝虚数がでる」の発想．でも絶対値を使っていない.

[13] 先生「(7) はどちらが●ですか？」という質問.「どちらでもいいよ」と答える.

[**14**] 「この機械は少しおかしい」という発言．$\dfrac{x}{|x|}$ は計算上は (7) になるはずだが表示がおかしいという．機械の特性を説明し，$\boxed{\mathrm{F6}}$ の style について説明

[**15**] (7) はできたが, 穴が空くのが気にいらんとのこと．

[**16**] 大きな穴が空いた．$\dfrac{1}{|x|+|x-2|-2}$

[**17**] (6) が完成 $\dfrac{|x|+|x-2|-2}{|x|+|x-2|-2}$

[**18**] (9) 完成 $\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-2|}{x-2}$

[**19**] (8) 完成 $\dfrac{|x|}{x}-\dfrac{|x-2|}{x-2}$

[**20**] (8)(9) のアイデアを確認する．

これで２時間終了

[**1**] 前回の復習

[**2**] 前回の (9) は穴が空いているのが気にいらんということだったから，今日は新しい関数を１つ教えよう．ガウス関数 $[x]$ の定義と例を説明．入力の方法を教える．int(x)

[**3**] 画面に $[x]$ を表示させ，table を観察．

[**4**] このような「階段のグラフ」になるものは世の中にたくさんある．どのようなものか？「タクシーの料金」という発言．

[**5**] では最初の 1Km が 10 円，次の 1km が 20 円と 1Km ごとに 10 円上がる関数を作れ．

[**6**] ３人がほぼ同時に「できた」と言った．$10\,[x]$ と $10\,[x]+10$ と $10\,[0.1x]$ それぞれのグラフを個別にみると，どれも完成しているように見える．よく吟味する．$10\,[x]$ は最初の 1km が無料だ．（大笑い）$10\,[0.1x]$ は trace をしておかしいことを確認．

[**7**] 「先生 $10\,[x]+10$ もおかしいよ.」「なぜなら車に乗っただけで降りても 10 円いるよ」そうか．ガウス関数は左が●だ．タクシーは右が●でないとおかしいな．では●と○を入れ替えよ．

[**8**] できた．$-[-x]$. 画面を観察するとできたように見えた．アイデアは x 軸に対称移動して，さらに y 軸対称移動している．もう一人の生徒が白板にグラフを書いて「少し違う」と説明する．結局 $-[-x+1]$ であるという結論になる．

[**9**] では今度は最初の 5Km までが 20 円で，あとは 1km ごとに 10 円ずつあがる関数を作れ．もちろん右端が●だよ．これはおそらくできないだろうと思って出題したのだが 10 分ほどで荒川君が作った．みんなで関数を鑑賞した.$y = |-5[-x+5]| + 5[x]$ であった．(実は画面上では成功したように見えるが，table をみると間違っている．しかし誰も気がつかない)

[**10**] みんなで，この関数の仕組みを調べた．２つの関数 $5[x]$ と $|-5[-x+5]|$ が合わさってうまくできている．これはいろんな関数に利用できそうである．

[**11**] では，最初の 5Km までが 20 円で，次の 3Km までが 50 円で，次の 2Km までが 100 円というような関数を作ろう．これは次回までの宿題として終了 (後日談　，この課題は次回はできていなかった．はやり無理なんだろうかと思っていたが，実は 9 月 18 日のゼミで坪内君がこれを完成させた)