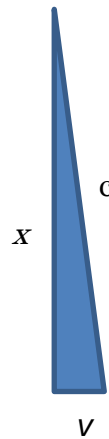


## 相対性理論とニュートン力学での運動エネルギーの近似

ニュートン力学は、日常の生活範囲ではほぼ正確と言えるが、光速に近い世界では正しいとは言えない。ニュートン力学では計算上で光速を超えてしまうことも起こりうる。相対性理論では、どんなに早いロケットでも光速を超えることはできない。そこで運動エネルギーについての相対性理論とニュートン力学での公式を用いて、ニュートン力学ではどの程度の誤差を生じるのかを探る。もちろん正しいのは相対性理論の方である。

まず、相対性理論では速さ  $v$  で運動する物体は質量が増える。それは下図の直角三角形でみると光速  $c$  を斜辺とすると速さ  $v$  と垂直な辺  $x$  の長さとの差に当たる。運動質量が  $c$  に、静止質量が  $x$  に比例する。その差だけ質量が増える。



相対性理論では、エネルギーは質量に光速の二乗を掛けたものである。

$$E=mc^2 \quad (E \text{ はエネルギー、} m \text{ は質量、} c \text{ は光速})$$

ニュートン力学では、運動エネルギーは静止質量に速さの二乗を掛けて 2 で割ると求められる。

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

真空中の光速は、秒速 299792.458km とされているが、ここでは秒速 30 万 km とする。

- 1 運動質量 200kg の物質が秒速 3 万 km(光速の 10 分の 1)で動いている場合  
まず静止質量  $m$  を求める。

直角三角形の図で

$$x^2 = 30^2 - 3^2$$

$$x^2 = 891$$

$$x = 29.85$$

よって、静止質量  $m$  は

$$m = 200 * 29.85 / 30$$

$$= 199 \text{ (kg)}$$

質量の差は、1kg となる。

したがって、相対性理論による運動エネルギーは、

$$E = mc^2$$

$$= 1 * 30 * 30$$

$$= 900 [100 \text{ 兆 kg} \cdot (\text{m/秒})^2]$$

ニュートン力学での運動エネルギーは、

$$K = 199 * 3 * 3 / 2$$

$$= 895.5 [100 \text{ 兆 kg} \cdot (\text{m/秒})^2]$$

秒速 3 万 km のときの相違は 4.5 [100 兆 kg · (m/秒)<sup>2</sup>] となる。

## 2 運動質量 200kg の物質が秒速 0.3 万 km(光速の 100 分の 1)で動いている場合

このときの静止質量  $m$  を求める。

$$x^2 = 30^2 - 0.3^2$$

$$x^2 = 899.91$$

$$x = 29.9985$$

よって、静止質量  $m$  は

$$m = 30 * 29.9985 / 200$$

$$= 199.99 \text{ (kg)}$$

質量の差は、0.01kg となる。

したがって、相対性理論による運動エネルギーは、

$$E = mc^2$$

$$= 0.01 * 30 * 30$$

$$= 9 [100 \text{ 兆 kg} \cdot (\text{m/秒})^2]$$

ニュートン力学での運動エネルギーは、

$$K = 199.99 * 0.3 * 0.3 / 2$$

$$= 8.99955 [100 \text{ 兆 kg} \cdot (\text{m/秒})^2]$$

秒速 0.3 万 km のときの相違は 0.0045 [100 兆 kg · (m/秒)<sup>2</sup>] となる。

3 運動質量 200kg の物質が秒速 0.03 万 km(光速の 1000 分の 1)で動いている場合

このときの静止質量  $m$  を求める。

$$x^2 = 30^2 - 0.03^2$$

$$x^2 = 899.9991$$

$$x = 29.999985$$

よって、静止質量  $m$  は

$$m = 200 * 29.999985 / 30$$

$$= 199.9999 \text{ (kg)}$$

質量の差は、0.0001kg となる。

したがって、相対性理論による運動エネルギーは、

$$E = mc^2$$

$$= 0.0001 * 30 * 30$$

$$= 0.09 \text{ [100 兆 kg} \cdot \text{(m/秒)}^2\text{]}$$

ニュートン力学での運動エネルギーは、

$$K = 199.9999 * 0.03 * 0.03 / 2$$

$$= 0.089999955 \text{ [100 兆 kg} \cdot \text{(m/秒)}^2\text{]}$$

秒速 0.03 万 km のときの相違は 0.000000045 [100 兆 kg  $\cdot$  (m/秒)<sup>2</sup>] となる。

秒速 0.03 万 km は時速 108 万 km でジェット機の速さのおよそ 1000 倍である。この速度は光速に比べると十分に遅いので、ニュートン力学の誤差も限りなく小さくなっている。

May 14, 2011