無限級数と広義積分

脇田美根夫 JE9PEL/1
2013/10/23

問題　次の各式が成り立つことを示せ。

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{6}\pi^2$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{12}\pi^2$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\cdots=\frac{1}{8}\pi^2$$

(4) $$\int_0^{\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=\frac{1}{12}\pi^2$$

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx=\frac{1}{3}\pi^2$$

解答(1)　この無限級数が収束することは昔から知られている。18 世紀最大の数学者オイラー(Euler)（1707－1783）により、この無限級数の和が初めて求められた。無限乗積とテーラー(Taylor)展開の比較によるオイラーの証明法による。

$$\sin\sqrt{x}=0\iff\sqrt{x}=0,\pi,2\pi,3\pi,\cdots$$

$$\iff x=0,\pi^2,(2\pi)^2,(3\pi)^2,\cdots$$

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0\iff x=\pi^2,(2\pi)^2,(3\pi)^2,\cdots$$

よって、$\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ を無限乗積で表すと、

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=a\{x-\pi^2\}\{x-(2\pi)^2\}\{x-(3\pi)^2\}\cdots \qquad \cdots ①$$

$$=a\prod_{n=1}^{\infty}\{x-(n\pi)^2\}$$

ところで、$\sin\sqrt{x}$ をテーラー展開すると、

$$\sin\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{x})^5}{5!}+\frac{(\sqrt{x})^7}{7!}+\cdots$$ だから

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{5!} + \frac{(\sqrt{x})^6}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^3}{7!} + \ \cdots \qquad \cdots ②$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)!}$$

①と②の定数項を比較して、

$$a\{(-\pi)^2\}\{-(2\pi)^2\}\{-(3\pi)^2\}\cdots = 1$$

$$\therefore\ a = \frac{1}{\{(-\pi)^2\}\{-(2\pi)^2\}\{-(3\pi)^2\}\cdots} = \{\prod_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi^2)\}^{-1}$$

∴ ①より、

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-n^2\pi^2}{-n^2\pi^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n^2\pi^2}\right)$$

$$= \left(1-\frac{x}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x}{3^2\pi^2}\right)\ \cdots \qquad \cdots ③$$

次に、②と③の x の係数を比較して、

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = -\frac{1}{3\,!}$$

よって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$ となる。

別解(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$ を、フーリエ級数を用いて証明する。

フーリエ級数

周期 2π の関数 $f(x)$ が 区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能なとき、フーリエ係数 a_n , b_n を次式により定義する。

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$ このとき、

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\}$$ を、関数 $f(x)$ のフーリエ級数という。

(フーリエ Foulier, 1768－1830, フランスの数学者・物理学者)

ディリクレの定理

> 周期 2π の関数 $f(x)$ が 区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に連続、かつ 区分的になめらかであれば、$f(x)$ のフーリエ級数は、
>
> ・連続的な点 x で $f(x)$ に収束し、
>
> ・不連続な点 x で $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ に収束する。

(ディリクレ Dirichlet, 1805－1859, ドイツの数学者)

まず、関数 $f(x)=x^2$（$-\pi \leqq x \leqq -\pi$） を周期2π の周期関数に拡張する。

このとき、

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)dx \quad \text{（部分積分法により）}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\frac{1}{n}\sin(nx)dx\right\}$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[x\frac{1}{n}(-\cos(nx))\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)dx\right\}$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\pi\cos(n\pi) = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx)dx = 0 \quad (\because\ y=x^2\sin(nx) \text{ は奇関数})$$

従ってディリクレの定理より、次の式が成り立つ。

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

$$\boxed{x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{4}{1^2}\cos(x) + \frac{4}{2^2}\cos(2x) - \frac{4}{3^2}\cos(3x) + \cdots} \qquad \cdots ④$$

式④で、$x=\pi$ を代入すると、

$$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

よって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$ となる。

解答(2) 式④で $x=0$ を代入すると、

$$0=\frac{1}{3}\pi^2-4\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ \cdots\ \right)$$

よって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{12}\pi^2$ となる。

解答(3) $f(x)=|x|$ （$-\pi \leqq x \leqq -\pi$） を周期2π の周期関数に拡張する。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)\,dx \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx\right\}$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\frac{1}{n}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi)-1)=(n:\text{奇数のとき})\ \frac{-4}{n^2\pi}$$

$$(n:\text{偶数のとき})\ 0$$

$$b_n=0$$

従ってディリクレの定理より、次の式が成り立つ。

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

$$\boxed{|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{1^2\pi}\cos x-\frac{4}{3^2\pi}\cos(3x)-\frac{4}{5^2\pi}\cos(5x)-\ \cdots} \qquad \cdots ⑤$$

式⑤で、$x=0$ を代入すると、

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

従って、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{8}\pi^2$ となる。

解答(4) $\displaystyle\frac{x}{e^x+1}=\frac{x}{e^x}\frac{1}{1+e^{-x}}$ (無限級数展開 $\displaystyle\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ （$|x|<1$）)

$$=\frac{x}{e^x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx} \qquad (\text{今 } x>0 \text{ より、} e^{-x}<1\ )$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x e^{-(n+1)x} \qquad \cdots ⑥$$

ここで、

$$\int_0^\infty x e^{-nx} dx = \left[-\frac{x e^{-nx}}{n} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{n} dx \qquad \text{(部分積分)}$$

（ 第１項は、ロピタルの定理より $\lim_{x\to\infty} x e^{-nx} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{nx}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n e^{nx}} = 0$ ）

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{n} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{n^2} \quad (n \neq 0) \qquad \cdots ⑦$$

よって、⑥を積分すると、

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1} dx = \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x e^{-(n+1)x} \right\} dx$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \left\{ \int_0^\infty (-1)^n x e^{-(n+1)x} dx \right\} \qquad \text{(項別積分)}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} \qquad \text{(⑦より)}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2 \qquad \text{(問題(2)より)}$$

解答(5) $x^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{x^2}{e^x} \frac{(e^x)^2}{(e^x+1)^2} = \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{\frac{(e^x+1)^2}{(e^x)^2}} = \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{(1+e^{-x})^2} \qquad \cdots ⑧$

ここで、無限級数展開より、

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^\infty n(-x)^{n-1} \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{(1+e^{-x})^2} = \sum_{n=1}^\infty n(-e^{-x})^{n-1} = \sum_{n=1}^\infty n(-1)^{n-1} e^{-(n-1)x} \qquad \cdots ⑨$$

よって、⑧と⑨より、

$$\frac{x^2}{e^x} \frac{1}{(1+e^{-x})^2} = \sum_{n=1}^\infty n(-1)^{n-1} x^2 e^{-nx}$$

ここで、$\int_0^\infty x^2 e^{-nx} dx = \left[-x^2 \frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x \frac{e^{-nx}}{n} dx \qquad$ (部分積分)

（ 第１項は、先と同様に 0）

$$= \frac{2}{n} \int_0^\infty x e^{-nx} dx = \frac{2}{n} \times \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^3} \qquad \text{(⑦より)}$$

よって、⑧と⑨より積分すると、

$$\int_0^\infty x^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx = \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty n(-1)^{n-1} x^2 e^{-nx} \right\} dx$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \left\{ \int_0^\infty n(-1)^{n-1} x^2 e^{-nx} dx \right\} \qquad \text{(項別積分)}$$

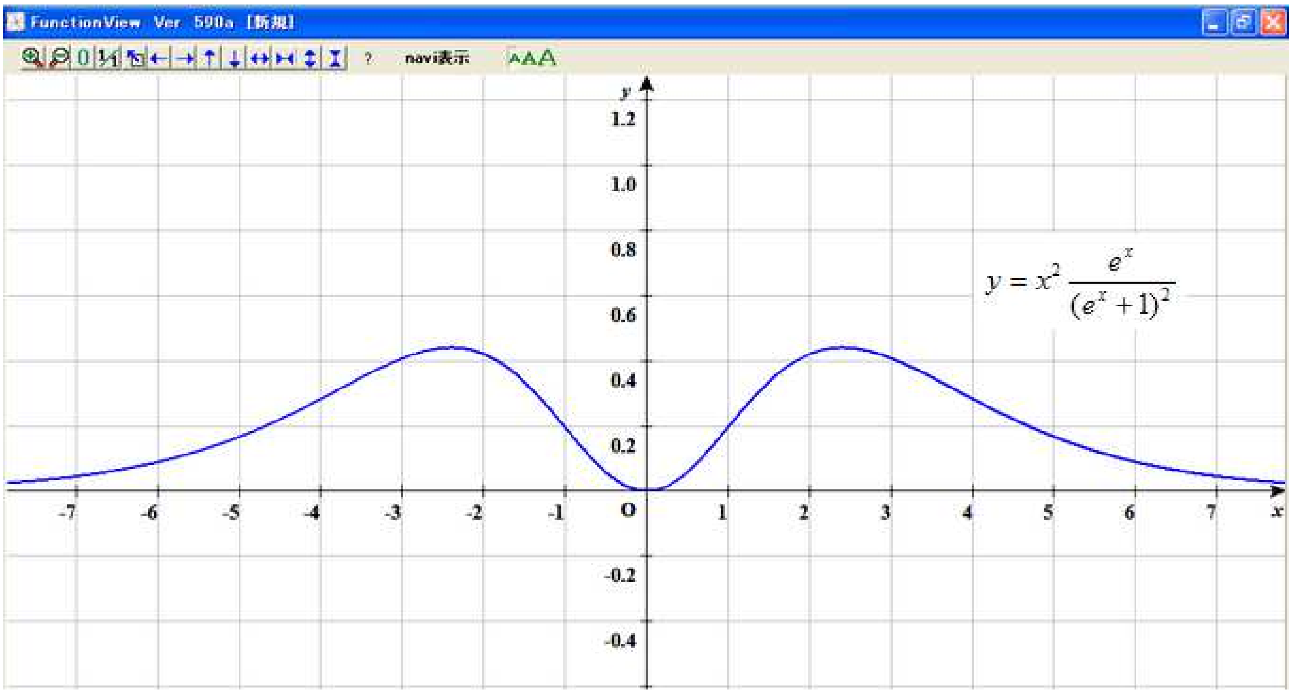
$$= \sum_{n=1}^\infty \left\{ n(-1)^{n-1} \frac{2}{n^3} \right\}$$

$$= 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 2\times\frac{1}{12}\pi^2 = \frac{1}{6}\pi^2 \qquad \text{(問題(2)より)}$$

関数 $f(x) = x^2 \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ は、次のことから偶関数である。

$$f(-x) = (-x)^2 \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = x^2 \frac{e^x}{(e^x)^2(e^{-x}+1)^2} = x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)$$

よって、$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx = 2\int_0^\infty x^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx = 2\times\frac{1}{6}\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2$ となる。



なお、この式 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\pi^2$ は、固体物理学入門 (by キッテル)丸善 の「電子気体の比熱」(p.154) を求める際に、証明無しに使われている式である。

[参考]
http://www.iis.it-hiroshima.ac.jp/~ohkawa/pdf/%83I%83C%83%89%81%5B%82%C6%96%B3%8C%C0%8B%89%90%94.pdf
http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/series/series.htm
http://kouyama.math.u-toyama.ac.jp/main/education/2007/discmath/pdf/text/text03.pdf ～ text05.pdf