パラドクスの話（１）

—双子のパラドクス—

<はじめに>

「囚人のパラドクス」など、このエッセイシリーズでもパラドクスがらみの話をとりあげたが、パラドクスとは楽しいものである。軽いナゾ解きから深いものまである。また (イ) 結論が誤りで「さてどこが間違いなんでしょう」というタイプや、(ロ) 結論は正しいけど理解し難いというタイプや、(ハ) いかにも意味がありそうだけどそもそも問い自体に意味がなかったというタイプなどがあるが、どこかしら本質を突いているものが多い。

<双子のパラドクス>

今回は「双子のパラドクス」について考えてみたい。双子のパラドクスというと、きょうびエンタングルメント関係かなと思われそうであるが、オーソドックスな相対論のパラドクスである。どんなものだったか、まず復習しよう。

相対論によると、高速で動くものは、動かないものに比べて時間の経過が遅れる。したがって、ある双子兄弟の弟がある慣性系に静止し、兄の方が弟のもとを離れて宇宙旅行をしてまた弟のところに戻って来たとすると、弟が年をとって兄の方は若いままとなる。ではこの話において兄と弟の立場を入れ換えてみたらどうなるか？　兄の立場に立てば、高速で離れて戻って来たのは自分ではなく弟の方である。そうすると逆に兄の方が年をとって弟は若いままのはずだ、となって、さっきの話と矛盾している。これが双子のパラドクスである。これは兄の方が若いままでいるのであって、タイプからすると (ロ) である。

念のため、上記の本来の双子のパラドクスと似て非なる「双子のパラドクスもどき」についても、あとで言及するために書いておこう。つまり兄が等速直線運動で弟から離れっぱなしで「帰って来ない」バージョンである。この場合弟が望遠鏡で兄の時計を見ていたら遅れて見えるし、逆のことは兄からも言えるだろう。実際どっちが早く年をとるのだ?ということになる。これはタイプからすると (ハ) である。

<兄と弟の非同等性>

さて「双子のパラドクスもどき」においては兄と弟は対等の立場にあるが、「本来の双子のパラドクス」においては兄と弟は全く同等な立場にあるわけではないことに気付く人は多いだろう。弟は宇宙の中のある慣性系の一つに静止して浮かんでいるが、兄は「行って戻って来る」ために速度の方向変化（加速度）を受けている。こう考えると、「兄が弟と比べて年をとらないのは弟に対して高速に動いているからというより、加速度を受けているからだ」と結論づけたくなる。さらには「だからこの現象は特殊相対性理論では説明できず、一般相対性理論が必要なのではないか」と思いたくなるかもしれない。

確かに一般相対性理論の枠組みで説明できないはずはなく、頭が一般相対性理論になっている人はその方が自然と思えるかもしれない[1] 。しかしここではそうではない方法を述べる。そ

[1] 頭が量子力学になっている人にとって、必ずしも量子論が必要ないことも量子論で説明する方がすっきりしたりすることがある。

の目的は、「双子のパラドクスを謎解きするのに一般相対性理論は要らないんだ」ということを言いたいがためではない。それよりここで強調したいのは、

(a) どの観測者からも同じに見える客観事象

(b) 始状態と終状態の間の経路の違い

の二つである。(a) は、観測者によって違って見えることを議論しているのか、そうではない客観的なことを議論しているのかを意識しよう、という趣旨である。(b) は量子力学みたいな感じ、あるいは変分法みたいな感じがするかもしれない。実はそれがねらいである。始点と終点を固定して経路を変化させてみましょう、ということを強調したいのだ。この考え方が物理のいろいろな基本的問題に出て来るのだ (が、それはおいおいということで)。今回の話の範囲で少し先取りすると、兄と弟が同等でないのは加速度を受けたか受けていないかということよりは、経路が同等でないという点が重要なのである。兄が加速度を受けていることは、その経路の実現のためには避けられない副産物程度のこと、とも言えるのである。

＜観測者によって相対的に異なって見える事象と絶対的事象＞

「双子のパラドクスもどき」は、弟と兄を見ている第三の観測者がどのような運動をしているかによって異なって見える。

その第三者が弟と一緒にいる場合は、望遠鏡で兄を見ていたら兄の時計は遅れて見え、したがって兄が年をとらないように見える。

その第三者が兄と一緒にいる場合は、望遠鏡で弟を見ていたら弟の時計の方が遅れて見え、したがって弟が年をとらないように見える。

その第三者が兄弟の中点にいて望遠鏡で弟と兄の両方をモニターしていたら、弟の時計と兄の時計は等しく動いて（ただしその第三者自身の時計よりは遅れて）見え、弟と兄は等しく齢を刻んで見える。だから「弟と兄のどちらがどれだけ早く年をとったか?」という質問は観測者によって違って見えてしまう状況にある。

これに対し「本来の双子のパラドクス」がわざわざ「兄が戻ってくる」ストーリーになっているのは、どんな観測者から見ても「弟と兄のどちらがどれだけ早く年をとったか?」という質問が客観的に意味をなすようにするためである。つまり、一度ある地点で時刻合わせをして離ればなれになり、再度出会って同じ時空の一点で時計を比較するストーリーにしたいがためである。これなら、それを見ている第三の観測者がどんな方向にどんなに高速に動いていても、答えに変わりはない。たとえその観測者が慣性系にいなくても、たとえば兄と同行したため年をとらなかったとしても、「兄は弟に比べ定量的にどのくらい年をとらなかったか」は客観的事実として観測できる。

つまり「(a) どの観測者からも同じに見える客観事象」を語るための都合の良い方法（の一つ）は、時空の一点で始状態を客観的状態に決め、変遷後再度時空の一点で終状態を客観的状態に決めて、比較することである。これは同時に

(b) 始状態と終状態の間の経路の違い

を注視することにもなって、(b) の重要さも物語る。

<時空の距離>

動いているモノの経過時間は何で計るのだろうか？　相対論では時間と空間が融合しているので、時空の中の距離を表す線素は「微小時間 dt」でもなく「微小距離 $d\mathbf{r}$」でもなく

$$ds = \sqrt{dt^2 - c^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)} \tag{1}$$

である。この表現は慣性系を一つ決めれば決まる。すなわち dt も dx も dy も dz も決まる[2] 。

さて、ある慣性系を採用して、移動するモノの軌跡を決めても、別の慣性系を採用すれば ds も当然異なる。しかし（慣性系によって記述は違うかもしれないが客観的には唯一の）経路 1 をとった兄の経過時間（ds を経路 1 で積分したもの）と、経路 2 をとった弟の経過時間（ds を経路 2 で積分したもの）の「差」が慣性系の採用の仕方によらずに一意に決まるならば[3] 、「どちらが年をとったか」は客観的事実になる。

弟はある慣性系で空間的にじっとしているので、その慣性系では $dx = dy = dz = 0$ なので、(1) 式は

$$ds = dt \tag{2}$$

となって、弟の時空経過要素 ds はその慣性系の実時間要素 dt に一致する。

もし兄が光速に近い速度で動いているとすると、(1) 式から

$$ds \ll dt \tag{3}$$

となって、兄の時空経過要素 ds は弟の慣性系の時間経過要素 dt に比べて非常に遅く経過することになる。

また、この慣性系で時刻 t の瞬間に兄と弟の時空距離を見たければ、$dt = 0$ なので

$$\frac{1}{c}ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{4}$$

となって、これは空間距離に一致する[4] 。

<始状態と終状態を固定して比較>

簡単のため弟に固定した慣性系で考え、時空の一点で兄と弟は時刻合わせをした時計をそれぞれ持ち、兄は弟を離れて宇宙旅行に行き、弟のところに戻って来たとしよう。弟は空間的には一点にとどまり時間だけ直線的に経過し、兄は遠くに行って戻ってくるので、四次元時空で見れば兄の方が余計に長い移動距離のように見えるが、それに欺されてはいけない。弟にとっての時間経過は上に見たように (2) 式で与えられるし、兄にとっては (3) 式で与えられる。つまり兄は弟に比べて若いままでいる。

---

[2] 慣性系とは、ものさしをゆっくり延長し、時刻合わせをしたたくさんの時計をゆっくり空間の各点に配って配置することができる一つの時空のフレームで、別の慣性系では別のものさしと時計が対応する。

[3] これは AB 効果の状況と似ている。ベクトルポテンシャルはゲージの任意性があるため架空のもので電磁場こそが物理的実体と感ずるかもしれないが、電子の位相の「差」に影響するという実際のイフェクトを持つものである。「空間座標」も慣性系の取り方で値が決まらないからといって、架空のものと言う人はいないだろう。まさに「ゲージ（ものさし）の取り方に任意性はあっても実際の効果を持つもの」である。

[4] 研究仲間に私と近い時期に近い場所で生まれた人がいる。その話題が出ると私は「そう、彼とは生まれた時空が近いんだよ」と答える。この場合 $dt \simeq 0$ と $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \simeq 0$ の両方を主張しているわけである。正確には $dt \simeq$1ヶ月で $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \simeq$10 km であるが、地球規模あるいは歴史規模ではほとんどゼロの偶然であろう。

いま弟に固定した慣性系で議論したが、どの慣性系でも同じこと（兄が弟にくらべて定量的にどれだけ経年が遅いか）が導かれる。（もちろん慣性系の座標変換にはローレンツ変換を用いる。）

＜同一状態についての注＞

以下余談であるが、この問題の場合、兄と弟の始状態（や終状態）を一致させるというのは、時空の座標の一致を意味する。「状態」というと座標のみならず運動量（速度）も指すのが普通だが、この問題の場合は速度は一致していなくてもいい。

どういうことかというと、始めに時計合わせをするときも、最後に時刻比較をするときも、互いに静止せず高速でバシッとすれ違ってもよい。動体視力が極めて良くて、すれ違う瞬間に時計合わせも時刻比較もできればよい。何が言いたいかというと、兄が弟から離れるときに必要な加速や、帰って来て弟のところで止まるための減速はこの話には不要である。（方向転換のときの減速と加速は避けられないが。）

さらに余計な注を付ければ、兄が戻って来るために方向転換するとき、極めて微弱な減速と加速で方向転換しても話は成立する。経路が違うことだけが重要なので。逆に、瞬時に方向転換してもよい[5] 。

さらにさらに余計な注を付ければ、話は変わるが、座標の一致だけでは済まない場合もある。粒子の干渉など、位置も運動量も含めて状態が一致するようにしておく必要がある場合のように。これは「観測者によって相対的にならない客観的事実を確保する」ことが目的でなく「干渉を起こすべく、あらゆる意味で区別できなくする」ことが目的なので。

[2011 年 9 月 13 日]

[5] そのような急激なショックに人間が耐えられればの話だが。